DANIEL C. IOAN
Universitatea “Politehnica” Bucureşti

CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE

Breviare teoretice şi probleme

Editura
2000

DANIEL C. IOAN
CIRCUITE ELECTRICE REZISTIVE
Breviare teoretice şi probleme

Referenţi ştiinţifici: Conf.dr.ing. Irina Munteanu
Ş.l. dr. ing. Gabriela Ciuprina

Editura, 2000
Bucureşti

Prefaţă

Lucrarea *Circuite electrice rezistive* se adresează în primul rând studenţilor de la facultăţile de profil electric: electrotehnică, electronică, automatică şi calculatoare, electroenergetică sau instalaţii electrice, dar ea este de un real folos în aprofundarea cunoştinţelor pentru orice student din învăţământul superior tehnic şi ştiinţific, inginerilor, tehnicienilor sau fizicienilor. Multe capitole pot fi folosite de elevii ultimelor clase din liceele teoretice sau de specialitate, mai ales pentru pregătirea examenului de bacalaureat sau a admiterii la facultate, la disciplina *Fizică*.

Volumul reprezintă rezultatul unei *experienţe didactice îndelungate în catedra de Electrotehnică a Universităţii Politehnica din Bucureşti*. El a fost elaborat în perioada 1970-1980 şi a fost îmbunătăţit ulterior, prin directă interacţiune cu zeci de generaţii de studenţi care au urmat cursul de *Bazele electrotehnicii*, semestrul întâi din anul al II-lea de studiu.

Decizia de a pune lucrarea la dispoziţia publicului larg se datorează pe de o parte reacţiei extrem de pozitive din partea celor care au folosit conţinutul ei în pregătirea lor ştiinţifică şi tehnică fundamentală, iar pe de altă parte solicitărilor din partea noilor generaţii de studenţi, preparatori şi asistenţi, de a avea la dispoziţie un material didactic care să permită studiul individual, într-o manieră eficientă.

Lucrarea tratează într-o manieră originală teoria circuitelor electrice rezistive liniare şi neliniare, din punctul de vedere al aplicaţiilor practice. Conţinutul lucrării este structurat în patru capitole.

Primul capitol este dedicat fundamentelor teoriei circuitelor electrice: ecuaţiile lui Kirchhoff, puterea transferată de elementele de circuit, formularea matriceal-topologică a ecuaţiilor fundamentale şi o trecere în revistă a principalelor ecuaţii constitutive ale elementelor ideale de circuit electric.

Al doilea capitol al lucrării se referă la circuitele electrice rezistive liniare, insistându-se asupra metodelor de analiză a acestor circuite: metode bazate pe transfigurări, metoda ecuaţiilor lui Kirchhoff atât în curenţi cât şi în tensiuni, metoda curenţilor ciclici, metoda potenţialelor nodurilor precum şi metodele Thévenin-Norton. Un paragraf special este dedicat circuitelor nereciproce, cu surse comandate liniar sau amplificatoare operaţionale cu reacţie negativă. Capitolul se încheie cu un paragraf dedicat teoremelor generale ale circuitelor rezistive neliniare, cum sunt teorema superpoziţiei şi cea a reciprocităţii.

Capitolul al treilea este dedicat analizei circuitelor rezistive neliniare. Sunt prezentate: metoda dreptei de sarcină, analiza circuitelor cu caracteristici liniare pe porţiuni, metoda micilor variaţii dar şi metodele iterative pentru analiza acestor circuite. Capitolul se încheie cu un paragraf dedicat teoremelor generale ale circuitelor rezistive neliniare.

În **ultimul capitol** se tratează câteva probleme şi tehnici speciale utilizate în studiul circuitelor rezistive, cum sunt metoda grafurilor de fluenţă şi analiza

senzitivităţilor.

Principalele **trăsături caracteristice şi de originalitate** ale lucrării constau în:

- fiecare paragraf este alcătuit dintr-un breviar teoretic în care sunt sintetizate principalele cunoştinţe necesare abordării aplicaţiilor, definiţii, formule, metode şi tehnici, fără a include demonstraţii complete, urmat de o serie de probleme ilustrative propuse, a căror rezolvare se poate face cu un efort de calcul numeric redus;

- spre deosebire de alte culegeri similare, accentul este pus pe înţelegerea conceptelor fundamentale, care din experienţa noastră didactică ridică dificultăţi, chiar dacă sunt aparent simple: sensuri de referinţă pentru curenţi şi tensiuni, convenţii de semn, reguli de asociere a sensurilor, deosebirea dintre elementele reale şi cele ideale de circuit electric, formularea corectă a circuitelor cu elemente ideale, conceptul de echivalenţă în teoria circuitelor, modelarea aproximativă, alegerea metodelor optime de analiză, analiza topologică a circuitelor, etc;

- chiar dacă autorul nu este adeptul reţetelor de rezolvare a problemelor, în lucrare sunt prezentate mai mulţi algoritmi de rezolvare, asociaţi chiar unor metode simple, în vederea dezvoltării gândirii algoritmice a studenţilor, abordare foarte apreciată de aceştia;

- problemele propuse au fost alese cu grijă dintre acelea care au o maximă relevanţă pentru aplicaţiile practice, întâlnite în viaţa de zi cu zi a inginerilor, motiv pentru care accentul a fost pus pe circuite electronice, electrice rezistive, atât liniare cât şi neliniare;

- prin parcurgerea sistematică a lucrării, cititorul învaţă să-şi formuleze singur probleme interesante, care nu presupun calcule numerice complicate şi au soluţii exprimabile prin numere întregi;

- accentul este pus pe circuitele rezistive, în vederea căpătării deprinderilor esenţiale necesare analizei circuitelor, urmând ca ulterior acestea să fie uşor extensibile la cazul circuitelor în regim variabil;

- un alt accent este pus pe rezolvarea manuală rapidă, chiar şi prin metode aproximative, ca o alternativă la analiza automată cu programe de calcul de tip SPICE, în vederea căpătării deprinderilor necesare înţelegerii funcţionării şi depanării unor circuite electronice complexe, uşurând astfel parcurgerea cursului de *Dispozitive şi circuite electronice*.

Apariţia acestei lucrări nu ar fi fost posibilă fără colaborarea unor studenţi, tehnicieni şi tinere cadre didactice. Dorim să aducem pe această cale **mulţumirile noastre** domnului *Matei Dorian*, care a realizat partea grafică în primul manuscris al lucrării şi studenţilor:

- *Merode Costin-Cătălin*;
- *Rădulescu Marius-Cristian*;
- *Blujdea Gabriel*;
- *Săbăreanu Robert-Petru*,

care au realizat tehnoredactarea finală a manuscrisului, folosind instrumentele *Xfig* şi LaTeX sub *Linux*, în *Laboratorul de Metode Numerice (LMN) din catedra de Electrotehnică a Universităţii Politehnica din Bucureşti.*

Mulţumim deasemenea referenţilor ştiinţifice Conf. Dr. ing. *Irina Munteanu* şi şefei de lucrări Dr. ing. *Gabriela Ciuprina*, pentru atenta citire a lucrării.

Cuprins

Capitolul 1

Fundamentele teoriei circuitelor electrice

1.1 Ecuaţiile lui Kirchhoff

BREVIAR

Elementul dipolar de circuit reprezintă un domeniu spaţial a cărui interacţiune electrică cu exteriorul se realizează prin intermediul a două părţi disjuncte ale suprafaţei sale, numite borne (fig. 1.1).



Fig. 1.1.

Prin *circuit electric* (sau reţea electrică) vom înţelege o mulţime de elemente dipolare conectate pe la borne (fig. 1.2).

Într-un circuit nu are importanţă aşezarea elementelor, ci doar modul de conexiune dintre ele; astfel circuitul din figura 1.2 este echivalent cu cel din figura 1.3. Din acest motiv, se spune că în teoria circuitelor electrice spaţiul este înzestrat cu o structură topologică şi nu cu una metrică (distanţele, unghiurile, lungimile nu au importanţă).

Ţinând cont de observaţia anterioară, structura unui circuit este caracterizată complet de graful G al circuitului.

Graful unui circuit este alcătuit dintr-o mulţime de puncte, numite *noduri* care reprezintă bornele elementelor de circuit, unite prin arce de curbă numite *laturi*, acestea reprezentând elementele dipolare.

Numărul laturilor se va nota în continuare cu L iar *numărul nodurilor* unui graf se va nota cu N.

Graful din figura 1.4 este asociat circuitului din figura 1.2 şi are L=5, N=4.

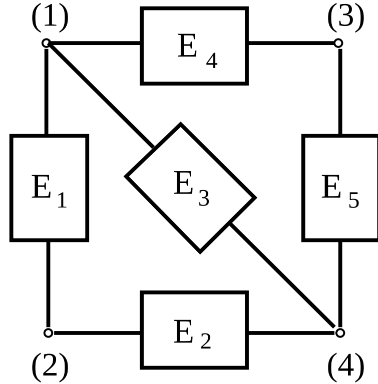


Fig. 1.2.

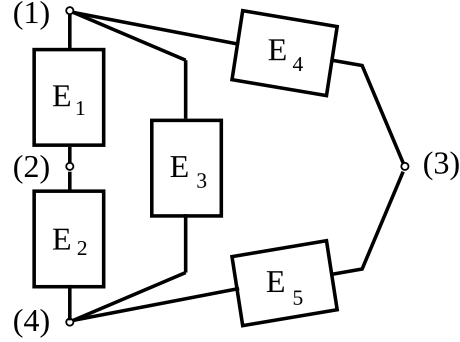


Fig. 1.3.

Pentru a reprezenta conexiunile unui element având bornele polarizate (neechivalente) se utilizează grafurile orientate, la care fiecare latură este marcată cu o săgeată. Două grafuri sunt echivalente dacă au acelaşi număr de laturi, iar laturile sunt conectate similar. Dacă cele două grafuri sunt orientate atunci laturile corespondente trebuie să fie orientate similar. Pentru caracterizarea cantitativă a interacţiunii electrice a unui element dipolar cu exteriorul se utilizează două mărimi fizice: curentul şi tensiunea electrică.

1. Intensitatea curentului electric este o mărime fizică scalară (pozitivă sau negativă) asociată unui sens de referinţă marcat de-a lungul elementului (fig. 1.5). Ea se notează cu i (sau I, dacă este constantă în timp) şi se măsoară în amperi [A].

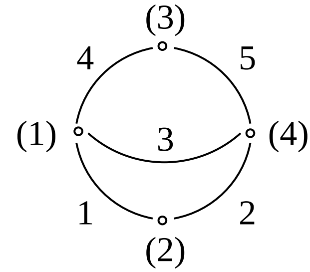


Fig. 1.4.

Săgeţile marcate în figura 1.5 nu reprezintă sensul real al curentului ci **sensul de referinţă** al acestuia. La schimbarea sensului de referinţă se schimbă semnul intensităţii curentului; astfel, pentru intensităţile i_1 şi i_2 marcate în figura 1.6 se poate scrie:

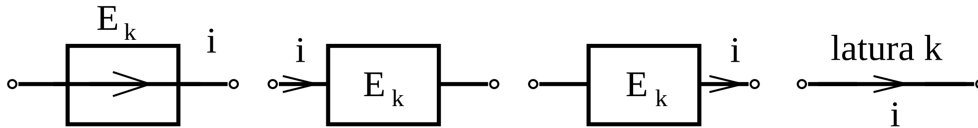


Fig. 1.5.

$$i_1 = -i_2.$$

Curentul se măsoară cu un aparat dipolar numit ampermetru, care se conectează în circuit asfel încât să fie străbătut de curentul măsurat. Ampermetrul măsoară curentul ce-l parcurge de la borna sa "plus" la borna "minus". Se poate considera că fiecare sens de referinţă pentru curent reprezintă un simbol pentru

ampermetru, indicând şi felul în care acesta este montat în circuit. Pentru reprezentarea curenţilor ce străbat elementele dipolare ale unui circuit electric se utilizează *graful de curent* G_I (fig. 1.7) care este un graf orientat, cu laturile orientate conform sensurilor de referinţă ale intensităţilor curenţilor.

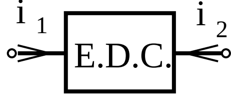


Fig. 1.6.

Se va evita utilizarea expresiilor: "curentul dintr-un circuit", "curentul pe un element de circuit", acceptate fiind expresiile: "curenţii dintr-un circuit"; "curentul ce străbate un element de circuit". Este obligatoriu ca orice referire la intensitatea unui curent să fie precedată de alegerea sensului de referinţă al acestuia. Curenţii oricărui circuit electric sunt supuşi unor restricţii. Aceste restricţii sunt generate de **prima teoremă a lui Kirchhoff** care afirmă că: *suma algebrică a intensităţilor curenţilor din laturile ce concură la un nod al circuitului este egală cu zero*:

$$\boxed{\sum_{k\in(j)}^{alg.} i_k = 0.} \tag{1.1}$$

În această sumă se trec cu plus curenţii ce părăsesc nodul şi cu minus curenţii ce intră în nod. Se spune că un graf de curent G_I este consistent dacă valorile intensităţilor din laturile sale satisfac prima ecuaţie a lui Kirchhoff (1.1). Consecinţa principală a primei ecuaţii a lui Kirchhoff constă în faptul că suma aritmetică a curenţilor ce intră într-un nod este egală cu suma aritmetică a curenţilor ce părăsesc nodul. Pentru figura 1.7 se poate afirma că:

– pentru nodul (1): $i_4 = i_1 + i_3$;
– pentru nodul (3): $i_4 + i_5 = 0$.

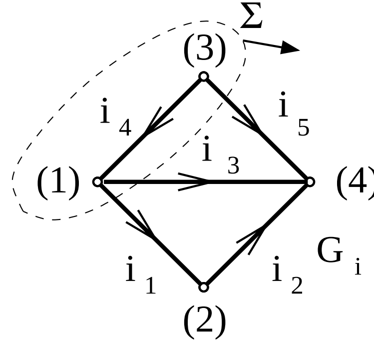


Fig. 1.7.

Prin scăderea acestor relaţii rezultă:

$$-i_5 = i_1 + i_3 \quad sau \quad i_1 + i_3 + i_5 = 0.$$

Se constată că suma algebrică a curenţilor ce părăsesc o suprafaţă închisă Σ este nulă. Această afirmaţie este o altă consecinţă a primei ecuaţii a lui Kirchhoff:

$$\sum_{k\in\{j\}}^{alg.} i_k = 0. \tag{1.2}$$

S-a notat cu {j} *secţiunea* j, care reprezintă o mulţime de laturi prin eliminarea cărora graful circuitului (iniţial conex) să devină neconex, iar reintroducerea oricărei laturi în graf să restabilească conexiunea grafului. Secţiunea reprezintă,

din punctul de vedere al teoriei grafurilor o suprafaţă închisă, urmând ca laturile unei secţiuni să fie laturile grafului intersectate de acea suprafaţă închisă.

Suprafaţa închisă se consideră orientată în sensul normalei exterioare, urmând ca pe laturile unei secţiuni să coexiste sensul de referinţă al curentului din graful G_I şi sensul de orientare al suprafeţei (din interior spre exterior). În suma algebrică (1.2) se trec cu plus curenţii din laturile secţiunii, la care sensul de referinţă al curentului coincide cu sensul de orientare al secţiunii (curenţii ce părăsesc secţiunea) şi se trec cu minus curenţii din laturile secţiunii la care sensul de referinţă al curentului este opus sensului de orientare al secţiunii (curenţii ce intră în secţiune).

2. Tensiunea electrică este o mărime fizică scalară (pozitivă sau negativă) asociată unei perechi ordonate de borne. Ea se notează cu u (sau U, dacă este constantă în timp) şi se măsoară în volţi [V]. Pentru ordonarea perechii de borne se utilizează "**sensul de referinţă al tensiunii**" (fig. 1.8), care reprezintă o curbă orientată având ca extremităţi bornele între care se calculează tensiunea. Schimbarea sensului de referinţă al tensiunii determină schimbarea semnului tensiunii; astfel, pentru figura 1.9 se poate scrie:

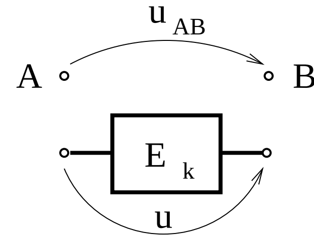


Fig. 1.8.

$$u_1 = -u_2.$$

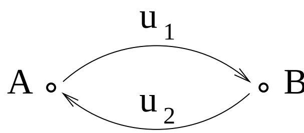


Fig. 1.9.

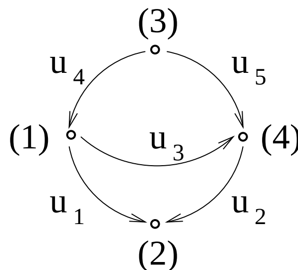


Fig. 1.10.

Tensiunea se măsoară cu un aparat dipolar numit voltmetru, care se conectează în circuit astfel încât bornele sale să fie puse în contact cu punctele între care se doreşte a se determina tensiunea. Voltmetrul măsoară tensiunea orientată de la borna "plus" la borna sa "minus".

Se poate considera că fiecare sens de referinţă pentru tensiune reprezintă un simbol pentru voltmetru, indicând felul în care acesta este montat în circuit.

Pentru reprezentarea tensiunilor la bornele elementelor dipolare ale unui circuit electric se utilizează *graful de tensiune* G_U (fig. 1.10), care este un graf orientat cu laturile orientate conform sensurilor de referinţă ale tensiunilor electrice.

Tensiunea electrică fiind o mărime fizică asociată unei perechi de borne, are sens să se vorbească despre tensiunea între două noduri între care nu există conectat nici un element dipolar. De exemplu, u_{32} este tensiunea între nodurile (3) şi (2) din figura 1.10.

Graful de tensiune G_U poate fi extins pâna la un graf complet ce conţine o latură între oricare pereche de noduri.

Se va evita utilizarea expresiilor: "tensiunea dintr-un circuit", "tensiunea dintr-un element de circuit", acceptate fiind expresiile: "tensiunile unui circuit", "tensiunea la bornele unui element de circuit". Se recomandă evitarea dublei săgeţi pentru marcarea unei tensiuni (fig. 1.11.a), preferându-se înlocuirea cu simpla săgeată (fig. 1.11.b). Tensiunile unui circuit sunt supuse restricţiilor guvernate de a doua ecuaţie a lui Kirchhoff. Această ecuaţie se referă la conceptul

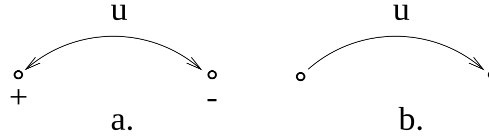


Fig. 1.11.

de *buclă*, ce reprezintă o mulţime de laturi care alcătuiesc o curbă închisă orientată cu un *sens de parcurs*.

Porţiunea de buclă cuprinsă între două noduri succesive se identifică cu latura corespunzătoare din graful de tensiune G_U, urmând ca pe acea latură să coexiste sensul de referinţă al tensiunii şi sensul de parcurs al buclei (cele două sensuri putând fi identice sau nu).

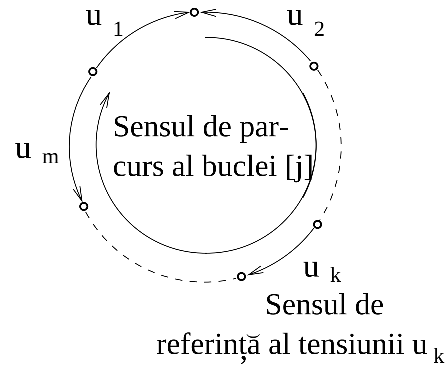


Fig. 1.12.

A doua teoremă a lui Kirchhoff afirmă că: *suma algebrică a tensiunilor laturilor unei bucle este egală cu zero*:

$$\boxed{\sum_{k\in[j]}^{alg.} u_k = 0.} \qquad (1.3)$$

În această sumă, se trec cu plus tensiunile ce au sensul de referinţă identic cu sensul de parcurs al buclei (u_1, u_k în figura 1.12), şi cu minus tensiunile ce au sensul de referinţă opus sensului de parcurs al buclei (u_2, u_m în figura 1.12).

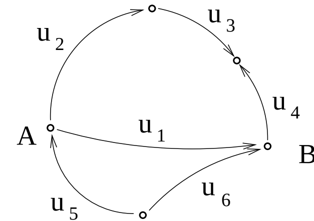


Fig. 1.13.

Se spune că un graf de tensiune G_U este consistent dacă valorile tensiunilor laturilor satisfac a doua ecuaţie a lui Kirchhoff (1.3). O consecinţă a celei de-a doua ecuaţii a lui Kirchhoff (1.3) este faptul că tensiunea între cele două noduri este egală cu suma algebrică a tensiunilor de pe o cale orientată ce leagă cele două noduri, indiferent care este această cale. De exemplu, în figura

1.13:

$$u_1 = u_2 + u_3 - u_4,$$
$$u_1 = -u_5 + u_6.$$

O altă consecinţă constă în faptul că fiecărui nod al unei reţele i se poate asocia o mărime fizică, numită *potenţial electric* care este definită ca tensiunea de la nodul respectiv la un nod de referinţă marcat ca în figura 1.14.

$$v_i = u_{i_0},\ v_j = u_{j_0}.$$

Potenţialul se măsoară, ca şi tensiunea, cu voltmetrul, conectând borna sa "minus" la nodul de referinţă. Potenţialul nodului de referinţă este prin definiţie nul.

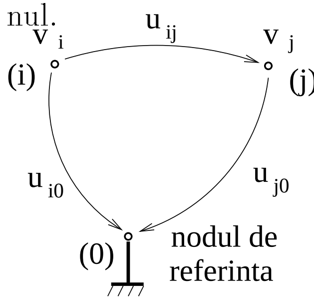


Fig. 1.14.

Tensiunea între două noduri u_{ij} se exprimă, conform primei consecinţe a teoremei a doua Kirchhoff, ca diferenţa dintre potenţialul nodului de plecare v_i şi potenţialul nodului de sosire v_j.

$$\boxed{u_{ij} = v_i - v_j.} \tag{1.4}$$

La schimbarea nodului de referinţă se modifică toate potenţialele (printr-o translaţie) dar tensiunile rămân invariante la această transformare. Din acest motiv se spune că potenţialele sunt definite până la o constantă aditivă.

În continuare sunt prezentate o serie de definiţii utile aplicării ecuaţiilor Kirchhoff.

Se numeşte *arbore* al unui graf G, un subgraf G_A cu N noduri ale cărui laturi nu formează bucle (fig. 1.15).

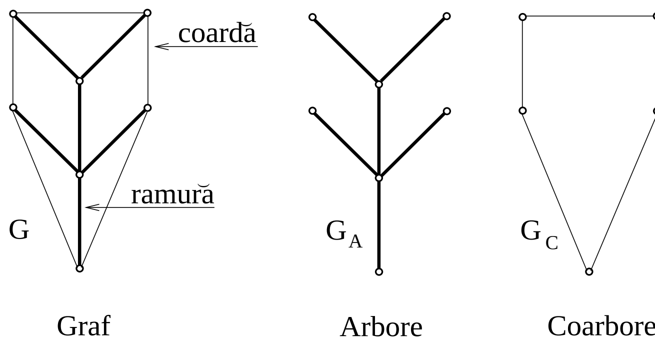


Fig. 1.15.

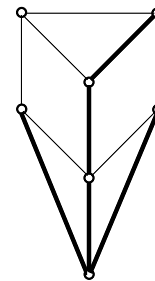


Fig. 1.16.

Se numeşte *coarbore* al grafului G, subgraful G_C ce se obţine prin eliminarea laturilor unui arbore. Laturile arborelui se numesc *ramuri* iar laturile coarborelui se numesc *coarde*. Un graf G cu L laturi şi N noduri conţine N-1 ramuri şi L-N+1 coarde. Un graf poate avea mai mulţi arbori şi coarbori(fig. 1.16).

Tensiunile din ramuri sunt independente din punctul de vedere al celei de-a doua ecuaţii Kirchhoff (pot fi alese arbitrar fără să contrazică ecuaţia, deoarece arborele nu conţine nici o buclă).

Tensiunile din coarde pot fi calculate în mod univoc, aplicând a doua ecuaţie Kirchhoff, în funcţie de tensiunile din arbore, deoarece fiecare coardă închide câte o buclă.

Aceste observaţii permit să se afirme că pentru o reţea se pot scrie **(L-N+1) ecuaţii Kirchhoff II independente**, pe un sistem de bucle fundamentale, generate fiecare de câte o coardă şi în rest de ramuri.

Curenţii din laturile unui coarbore sunt independenţi din punctul de vedere al primei ecuaţii Kirchhoff (pot fi aleşi arbitrar fără să contrazică ecuaţia Kirchhoff I, deoarece nu se pot forma secţiuni doar din coarde).

Curenţii din arbore pot fi calculaţi în mod univoc în funcţie de curenţii din coarbore, aplicând prima ecuaţie Kirchhoff, deoarece fiecare ramură generează o secţiune alcătuită din acea ramură şi în rest din coarde.

Aceste observaţii permit să se afirme că pentru o reţea se pot scrie **N-1 ecuaţii Kirchhoff I independente** pe un sistem de secţiuni fundamentale, generate fiecare de câte o ramură şi în rest de coarde. Ecuaţiile Kirchhoff pentru curenţi, scrise în N-1 noduri distincte, indiferent care sunt acestea, alcătuiesc un sistem de ecuaţii liniar independente.

PROBLEME

1.1.1. Să se reprezinte grafurile circuitelor din figura 1.1.1 şi să se determine parametrii topologici L şi N.

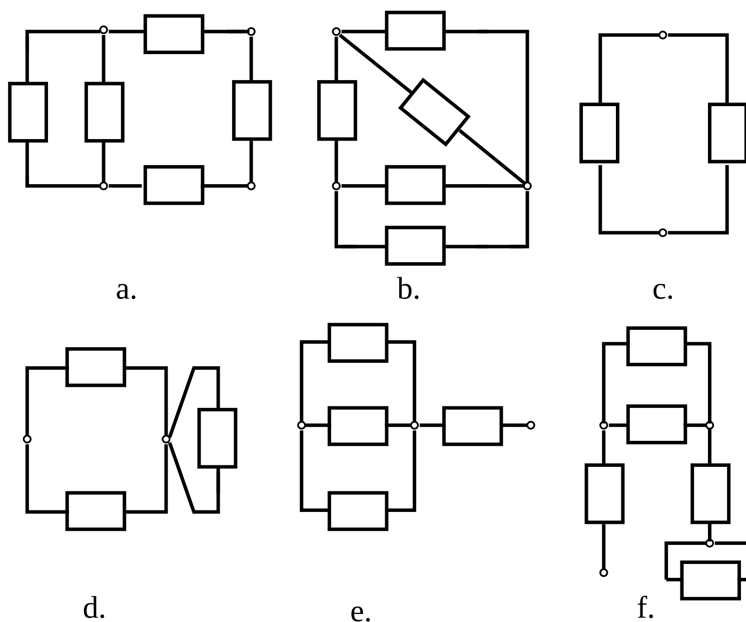


Fig. 1.1.1.

1.1.2. Să se determine clasele de echivalenţă în mulţimea de grafuri din figura 1.1.2.

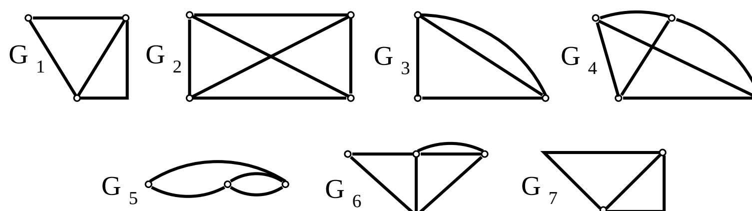


Fig. 1.1.2.

1.1.3. Să se determine clasele de echivalenţă ale mulţimii de grafuri orientate din figura 1.1.3.

1.1.4. Să se calculeze intensităţile curenţilor din grafurile de curent G_I reprezentate în figura 1.1.4, presupunând că ele sunt asociate aceluiaşi circuit electric.

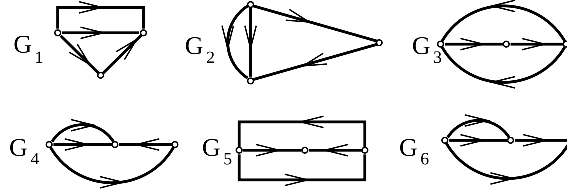


Fig. 1.1.3.

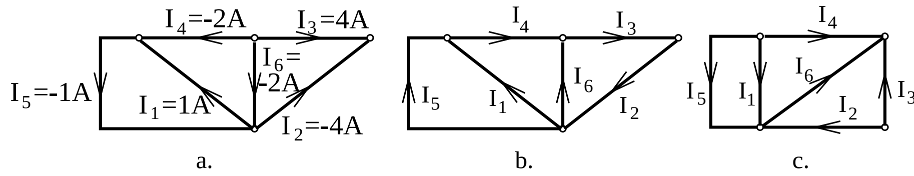


Fig. 1.1.4.

1.1.5. Să se completeze grafurile de curent din figura 1.1.5 aplicând prima ecuaţie Kirchhoff şi să se verifice apoi ecuaţiile pentru diferite secţiuni.

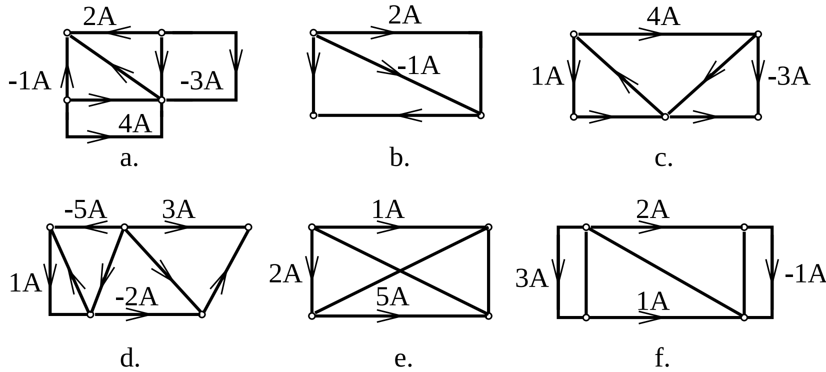


Fig. 1.1.5.

1.1.6. Să se calculeze tensiunile electrice din grafurile G_U prezentate în figura 1.1.6, presupunând că grafurile sunt asociate aceluiaşi circuit electric.

1.1.7. Să se completeze grafurile de tensiune din figura 1.1.7 şi să se verifice rezultatul aplicând a doua ecuaţie Kirchhoff pe alte bucle ale circuitului.

1.1.8. Să se calculeze tensiunile din grafurile prezentate în figura 1.1.8 în funcţie de potenţialele nodurilor.

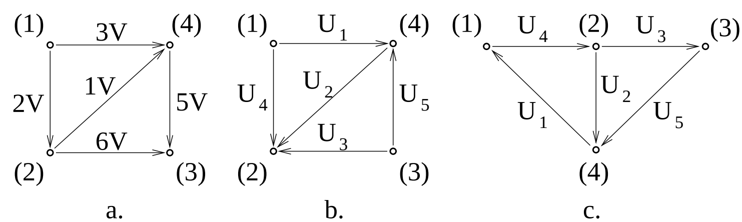


Fig. 1.1.6.

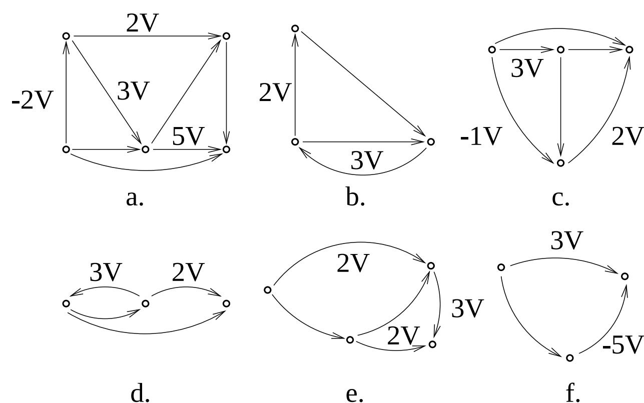


Fig. 1.1.7.

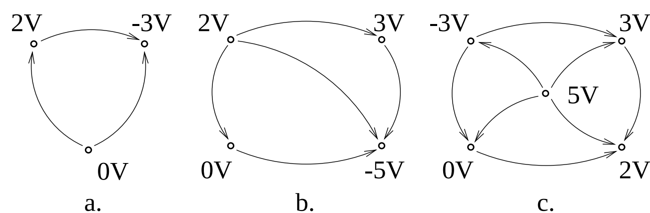


Fig. 1.1.8.

1.1.9. Să se calculeze potenţialele nodurilor la grafurile de tensiune prezentate în figura 1.1.9 şi să se completeze aceste grafuri.

1.1.10. Să se calculeze potenţialele nodurilor la grafurile de tensiune din figura 1.1.10, presupunând, pe rând, fiecare nod ca nod de referinţă.

1.1.11. Să se determine toţi arborii grafurilor din figura 1.1.11.

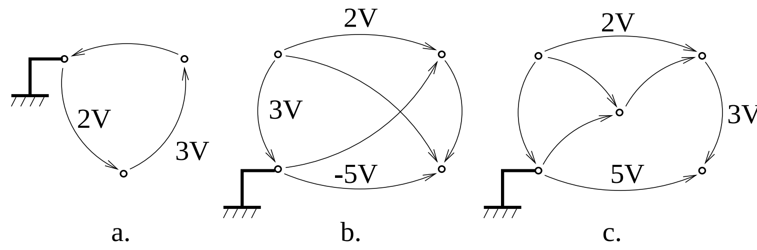


Fig. 1.1.9.

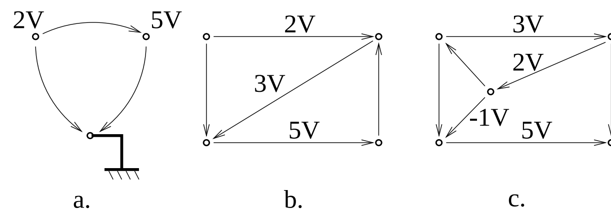


Fig. 1.1.10.

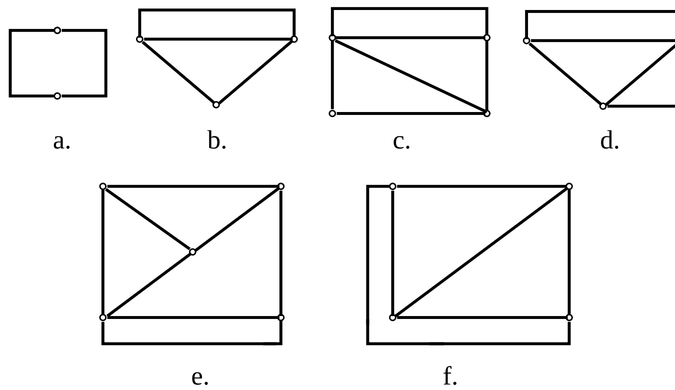


Fig. 1.1.11.

1.1.12. Considerând că grafurile din figura 1.1.12, sunt grafuri de curent, să se aleagă pe coardele unui coarbore curenţi arbitrari şi să se calculeze curenţii din ramuri.

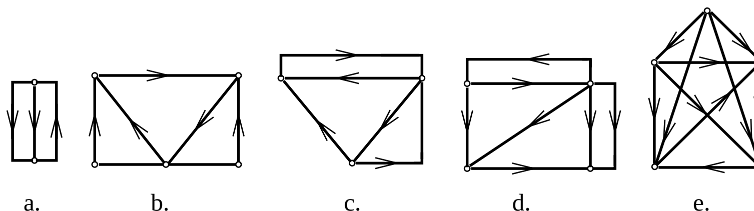


Fig. 1.1.12.

1.1.13. Presupunând că grafurile din figura 1.1.13, sunt grafuri de tensiune, să se aleagă pe ramurile unui arbore tensiuni arbitrare şi să se calculeze tensiunile din coarde. Să se verifice rezultatele aplicând ecuaţia Kirchhoff II pe alte bucle decât cele fundamentale.

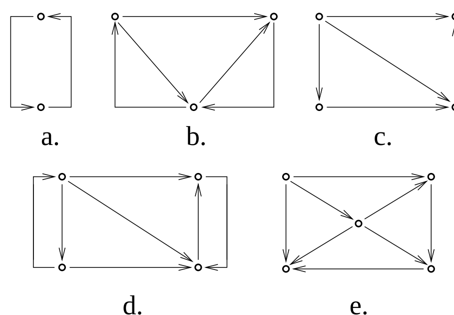


Fig. 1.1.13.

1.1.14. Să se determine care din grafurile reprezentate în figura 1.1.14 sunt grafuri de curent consistente (la care ecuaţiile Kirchhoff I sunt verificate).

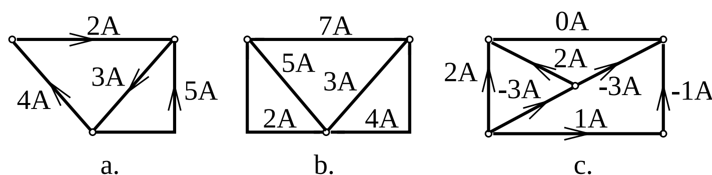


Fig. 1.1.14.

1.1.15. Să se determine care din grafurile reprezentate în figura 1.1.15 sunt grafuri de tensiune consistente (la care ecuaţiile Kirchhoff II sunt verificate).

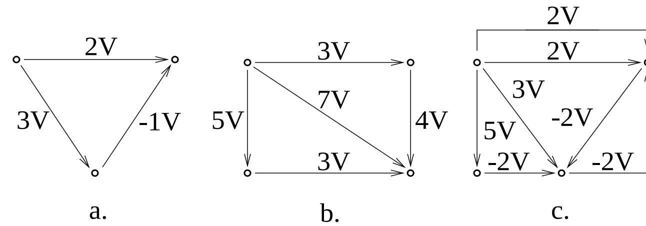


Fig. 1.1.15.

1.2 Puteri transferate de elementele de circuit

BREVIAR

Elementele dipolare de circuit electric sunt capabile să absoarbă, de la reţeaua din care fac parte, energie electrică pe care o pot înmagazina sau disipa sub alte forme de energie; deasemenea ele pot livra energie electrică circuitului. Transferul de energie electrică se realizează pe la borne iar **puterea transferată** de un element dipolar (măsurabil în Waţi) satisface relaţia:

$$\boxed{p = ui.} \tag{1.5}$$

Pentru a cunoaşte sensul transferului energetic (de la element spre reţea sau invers) este necesară cunoaşterea semnului produsului ui şi a modului în care au fost alese sensurile de referinţă ale tensiunii u şi ale curentului i.

Cele patru moduri în care se pot asocia sensurile de referinţă ale tensiunii şi curentului la un element dipolar se împart în două categorii numite **reguli de asociere a sensurilor**.

Regula de asociere a sensurilor de la receptoare (fig. 1.17) corespunde cazului în care tensiunea şi intensitatea curentului au acelaşi sens de referinţă faţă de borne. În acest caz sensul convenţional al puterii p este de la circuit spre element.

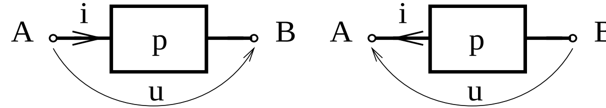


Fig. 1.17.

Regula de asociere a sensurilor de la generatoare (fig. 1.18) corespunde cazului în care tensiunea şi intensitatea curentului au sensuri de referinţă opuse faţă de borne. În acest caz sensul convenţional al puterii p este de la element către circuit.

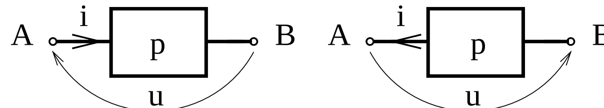


Fig. 1.18.

Determinarea sensului real al transferului de energie se face după următoarele

reguli, reprezentate în figura 1.19.

semnul lui p=ui	regula de asociere	sensul real de transfer al puterii
+	receptoare	absorbită de element
+	generatoare	produsă de element
-	receptoare	produsă de element
-	generatoare	absorbită de element

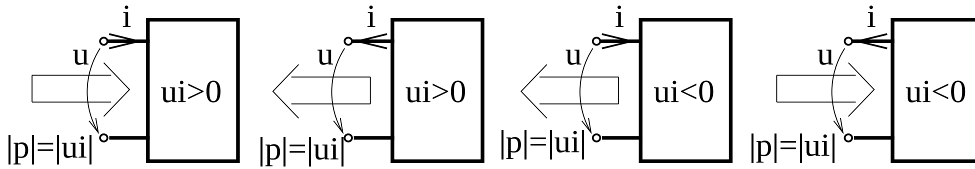


Fig. 1.19.

Puterile transferate de elementele unui circuit electric satisfac o ecuaţie de conservare dată de **teorema Tellegen**. *Dacă două grafuri, unul de curent G_I şi unul de tensiune G_U, sunt echivalente ca grafuri orientate, atunci:*

$$\boxed{\sum_{k=1}^{L} u_k i_k = 0.} \tag{1.6}$$

Dacă cele două grafuri sunt echivalente doar ca grafuri neorientate atunci relaţia (1.6) rămâne valabilă cu condiţia ca suma să fie algebrică. Convenţia de semn adoptată constă în considerarea semnului plus pentru laturile cu sensurile asociate conform regulii de la generatoare şi a semnului minus în caz contrar. În consecinţă dacă grafurile G_U şi G_I sunt asociate aceleiaşi reţele electrice, suma algebrică a puterilor transferate de toate elementele reţelei este nulă.

$$\boxed{\sum_{k=1,L}^{alg} p_k = 0.} \tag{1.7}$$

Condiţia de echivalenţă a grafurilor orientate reprezintă faptul că reţeaua are adoptată, pentru toate elementele, regula de asociere a sensurilor de la receptoare.

Rezultă deci că în orice circuit electric, în orice moment suma aritmetică a puterilor consumate este egală cu suma puterilor generate.

Relaţia (1.6) este valabilă şi atunci când se consideră tensiunile u_k ale unui circuit C_1 şi curenţii i_k ai unui circuit C_2, cu condiţia ca circuitele C_1 şi C_2 să admită acelaşi graf G (circuitele au aceeaşi structură topologică). În acest caz

produsul $u_k i_k$ se măsoară tot în Waţi dar nu reprezintă o putere transferată ci o "pseudoputere". În concluzie se poate spune că teorema lui Tellegen garantează nu numai bilanţul puterilor, ci şi pe cel al pseudoputerilor.

PROBLEME

1.2.1. Să se determine regulile de asociere a sensurilor la dipolii din figura 1.2.1 şi să se calculeze puterile transferate şi sensul acestora.

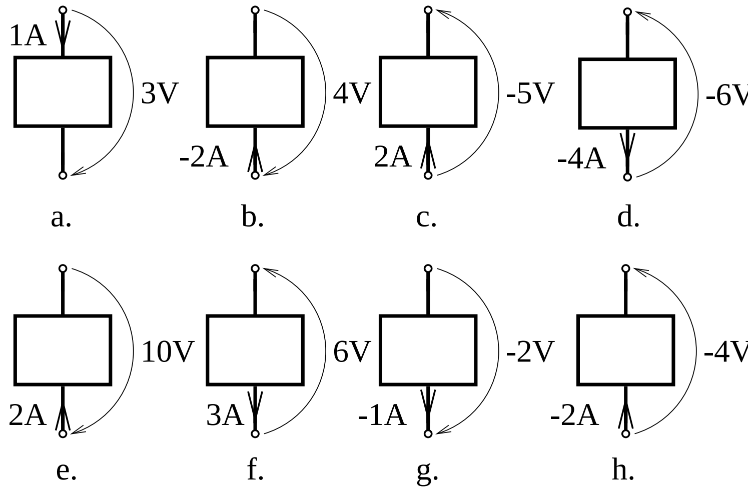


Fig. 1.2.1.

1.2.2. Să se calculeze intensităţile curenţilor la dipolii din figura 1.2.2.

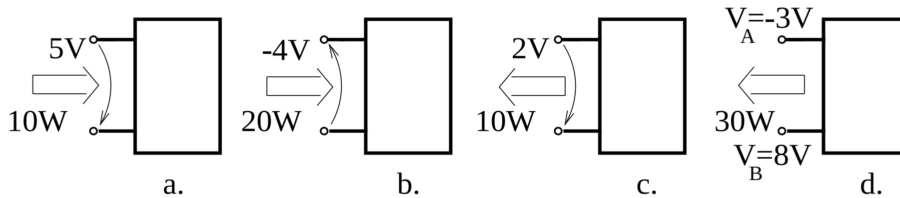


Fig. 1.2.2.

1.2.3. Să se calculeze tensiunile la bornele dipolilor din figura 1.2.3.

1.2.4. Să se completeze grafurile de curent G_I şi grafurile de tensiune G_U din figura 1.2.4 şi să se indice regulile de asociere a sensurilor pentru laturile grafurilor. Să se compare suma puterilor absorbite de elemente cu suma puterilor

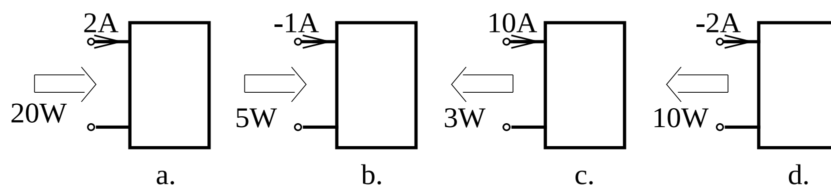


Fig. 1.2.3.

generate de elemente, pentru fiecare pereche de grafuri.

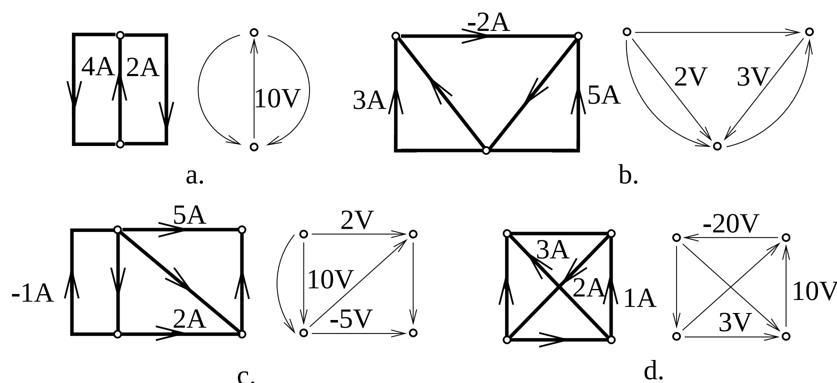


Fig. 1.2.4.

1.2.5. Să se genereze un graf G cu L laturi şi N noduri. Pe un arbore al acestui graf să se aleagă tensiuni arbitrare şi să se completeze graful G_v. Să se aleagă curenţi arbitrari în laturile unui coarbore şi să se completeze graful de curent G_I, astfel încât sensurile de referinţă să fie asociate dupa regula de la generatoare. Să se verifice teorema Tellegen determinându-se pentru fiecare latură sensul real al puterii.

Aplicaţie:

a) N=3, L=6;

b) N=4, L=7;

c) N=5, L=8.

1.3 Matrice de incidenţă

BREVIAR

Pentru reprezentarea numerică a structurii circuitelor electrice se utilizează matricele de incidenţă (sau apartenenţă). Acestea se numesc şi matrice topologice deaorece descriu topologia circuitelor şi au valori ale elementelor 0, +1 sau -1. În continuare, se adoptă următoarea convenţie de numerotare a laturilor: primele (N-1) laturi aparţin unui arbore, iar celelalte (L-N+1) laturi aparţin unui coarbore.

Matricea de incidenţă a laturilor la noduri A' este o matrice cu L coloane şi N linii având elementele:

$a_{ij} = 1$, dacă latura j iese din nodul (i);

$a_{ij} = -1$, dacă latura j intră în nodul (i);

$a_{ij} = 0$, dacă latura j nu este incidentă la nodul (i).

Matricea A' se descompune în două submatrici:

$$A' = [A'_a, A'_c],$$

în care A'_a conţine primele (N-1) coloane, asociate laturilor din arbore, iar A'_c conţine ultimele (L-N+1) coloane, asociate laturilor din coarbore. Dacă din matricea A' se elimină o linie, se obţine o matrice A *numită matrice redusă* de apartenenţă a laturilor la noduri.

Matricea de incidenţă a laturilor la buclele fundamentale B este o matrice cu L coloane şi (L-N+1) linii având elementele:

$b_{ij} = 1$, dacă latura j aparţine buclei [i] şi are sensul de referinţă identic cu sensul de parcurs al buclei;

$b_{ij} = -1$, dacă latura j nu aparţine buclei [i] şi are sensul de referinţă opus sensului de parcurs al buclei;

$b_{ij} = 0$, dacă latura j nu aparţine buclei [i].

Matricea B se descompune în două submatrici:

$$B = [B_a,\ B_c],$$

în care B_a conţine primele (N-1) coloane, asociate laturilor din arbore, iar B_c conţine (L-N+1) coloane asociate coarborelui. Dacă buclele fundamentale, generate fiecare de către o coardă, sunt numerotate în ordinea dată de coardele care le generează, atunci:

$$B = [B_a, U] \tag{1.8}$$

unde U este matricea unitate de ordinul (L-N+1).

Matricea de incidenţă a laturilor la secţiunile fundamentale D este o matrice cu L coloane şi (N-1) linii având elementele:

$d_{ij} = 1$, dacă latura j aparţine secţiunii {i} şi are sensul de referinţă identic cu sensul de orientare a secţiunii;

$d_{ij} = -1$, dacă latura j aparţine secţiunii {i} şi are sensul de referinţă opus sensului de orientare a secţiunii;

$d_{ij} = 0$, dacă latura j nu aparţine secţiunii {i}.

Matricea D se descompune în două submatrici:

$$D = [D_a \vdots D_c],$$

în care D_a conţine (N-1) coloane, corespunzătoare laturilor din arbore, iar D_c are (L-N+1) coloane, corespunzătoare laturilor din coarbore. Dacă secţiunile fundamentale, generate fiecare de câte o ramură, sunt numerotate cu numerele ramurilor ce le generează, atunci:

$$D = [U \vdots D_c], \tag{1.9}$$

în care U este matricea unitate de ordinul (N-1).

Matricele A, B şi D au liniile independente, rangul matricilor A şi D este (N-1) iar rangul matricei B este (L-N+1).

Matricea B este ortogonală faţă de matricele A şi D:

$$BA^T = 0, \quad BD^T = 0, \tag{1.10}$$

în care s-a notat cu M^T transpusa matricei M.

Dacă $B_c = U$ şi $D_a = U$ atunci:

$$B_a = -D_c^T = F. \tag{1.11}$$

Submatricea $F = B_a$ cu (L-N+1) linii şi (N-1) coloane este *matricea de apartenenţă a ramurilor arborelui la buclele fundamentale*, egală şi de semn opus cu *transpusa matricei de apartenenţă a corzilor la secţiunile fundamentale* şi se numeşte **matrice redusă de conexiune** (sau matricea apartenenţelor esenţiale).

Prima ecuaţie a lui Kirchhoff se scrie matriceal, pentru noduri, sub forma:

$$\boxed{Ai = 0,} \tag{1.12}$$

iar pentru secţiunile fundamentale ale unui circuit sub forma:

$$\boxed{Di = 0,} \tag{1.13}$$

în care matricele A şi D sunt matricele de apartenenţă ale grafului de curent iar $i = [i_1, i_2, ..., i_L]^T$ este *vectorul curenţilor* din laturile circuitului.

A doua ecuaţie a lui Kirchhoff se scrie matriceal, pentru buclele fundamentale ale unui circuit, sub forma:

$$\boxed{Bu = 0,} \tag{1.14}$$

în care matricea B este matricea de apartenenţă pentru graful de tensiune iar $u = [u_1, u_2, ..., u_L]^T$ este *vectorul tensiunilor* din laturile circuitului.

Matricele coloană, cu L elemente, ale curenţilor i şi tensiunilor u se pot descompune:

$$i = \begin{bmatrix} i_a \\ i_c \end{bmatrix}; \ u = \begin{bmatrix} u_a \\ u_c \end{bmatrix},$$

în care i_a şi u_a reprezintă curenţii, respectiv tensiunile din ramuri, iar i_c şi u_c reprezintă curenţii, respectiv tensiunile din coarde.

Într-un graf consistent de curent, curenţii din arbore se exprimă, în baza relaţilor (1.13) şi (1.9), în funcţie de cei din coarbore, cu relaţia (valabilă pentru $D_a = U$):

$$i_a = -D_c i_c \quad sau \quad i = B^T i_c. \tag{1.15}$$

Ultima relaţie este valabilă dacă graful de curent este echivalent cu graful de tensiune (asocierea sensurilor de referinţă este făcută după regula de la receptoare pentru toţi dipolii).

Într-un graf consistent de tensiune, tensiunile din coarbore se exprimă, în baza relaţilor (1.14) şi (1.8) în funcţie de cele din arbore, cu relaţia (valabilă pentru $B_c = U$):

$$u_c = -B_a u_a \quad sau \quad u = D^T u_a. \tag{1.16}$$

Ultima relaţie este valabilă doar dacă graful de tensiune este echivalent cu cel de curent.

Tensiunile laturilor se exprimă în funcţie de potenţialele nodurilor cu relaţia (1.4), care pentru întreg circuitul are următoarea formă matriceală, valabilă atunci când G_U şi G_I sunt ordonate similar:

$$\boxed{u = A^T v,} \tag{1.17}$$

în care $v = [v_1, v_2, ..., v_{N-1}]^T$ este *vectorul potenţialelor nodurilor*, presupunând nodul N ca nod de referinţă.

Se poate afirma că oricare din relaţiile (1.12), (1.13), (1.15) reprezintă forme matriceale echivalente al ecuaţiilor Kirchhoff I, iar relaţile (1.14), (1.16), (1.17) reprezintă forme matriceale ale ecuaţilor Kirchhoff II.

Teorema lui Tellegen (1.6) capătă următoarea formă matriceală:

$$\boxed{u^T i = 0.} \tag{1.18}$$

PROBLEME

1.3.1. Să se scrie matricele de apartenenţă A, B, D pentru grafurile reprezentate în figura 1.3.1.

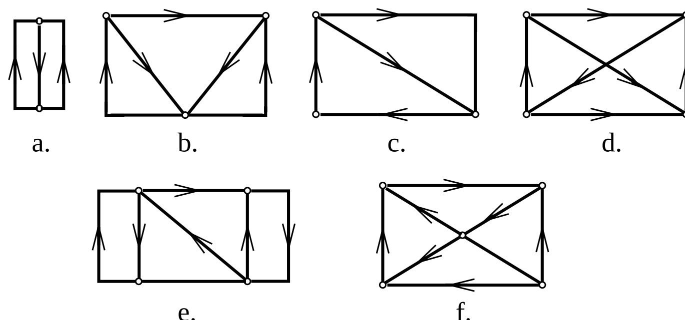


Fig. 1.3.1.

1.3.2. Să se stabilească matricele reduse de conexiune pentru grafurile prezentate în figura 1.3.1.

1.3.3. Să se reprezinte grafurile ce au următoarele matrice de apartenenţă:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.3.4. Să se calculeze intensităţile curenţilor din grafurile de curent reprezentate în figura 1.1.5, utilizând matricele D_c şi B.

1.3.5. Să se calculeze tensiunile din grafurile de tensiune reprezentate în figura 1.1.7 utilizând matricele B_a şi D.

1.3.6. Să se calculeze tensiunile din grafurile de tensiune reprezentate în figura 1.3.2 în funcţie de potenţialele nodurilor, utilizând matricea de apartenenţă A.

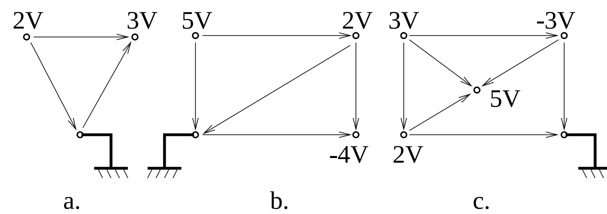


Fig. 1.3.2.

1.3.7. Pornind de la matricea A să se calculeze matricile de apartenenţă A', B şi D.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.4 Elemente ideale de circuit

BREVIAR

Elementele ideale de circuit reprezintă concepte fundamentale ale teoriei circuitelor electrice, ele fiind definite ca elemente dipolare ce impun o anumită restricţie tensiunii şi intensităţii curentului, restricţie ce poartă numele de **ecuaţia constitutivă caracteristică sau de funcţionare** a elementului ideal. Elementele ideale, prin faptul că au ecuaţiile caracteristice extrem de simplificate, nu trebuie confundate cu elementele reale de circuit, în schimb sunt utile în modelarea acestora.

1. Rezistorul ideal este un element dipolar la care tensiunea la borne este funcţie univocă de intensitatea curentului ce-l străbate (rezistorul controlat în curent) sau la care intensitatea curentului este funcţie univocă de tensiune (rezistorul controlat în tensiune). Dacă relaţia dintre tensiune şi curent este o relaţie liniară, atunci elementul se numeste rezistor liniar. În figura 1.20.a este prezentat simbolul rezistorului neliniar, iar în figura 1.20.b este prezentat simbolul rezistorului liniar.



Fig. 1.20.

Ecuaţia constitutivă a rezistorului neliniar, invariant în timp este:

$$u = f(i), \tag{1.19}$$

pentru cazul rezistorului controlat în curent, şi respectiv

$$i = g(u), \tag{1.20}$$

pentru cazul rezistorului controlat în tensiune. În cazul rezistorului liniar:

$$\boxed{\begin{array}{l} u = Ri; \\ i = Gu. \end{array}} \tag{1.21}$$

Mărimile R şi $G = 1/R$ se numesc *rezistenţa*, respectiv *conductanţa* rezistorului şi sunt parametrii caracteristici ai elementului. Relaţiile (1.19) şi (1.21) sunt valabile pentru sensurile de referinţă prezentate în figura 1.20. În cazul schimbării

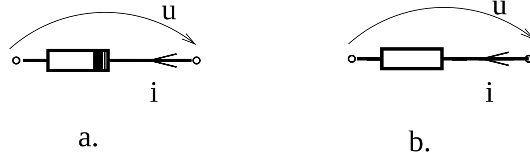


Fig. 1.21.

sensurilor de referinţă se modifică în mod corespunzător ecuaţiile. De exemplu, în cazul prezentat în figura 1.21: Ecuaţiile de funcţionare au forma :

$$u = -f(-i), \tag{1.22}$$

pentru rezistorul neliniar controlat în curent,

$$i = -f(-u), \tag{1.23}$$

pentru rezistorul neliniar controlat în tensiune şi:

$$\boxed{\begin{array}{l} u = -Ri; \\ i = -Gu, \end{array}} \tag{1.24}$$

pentru rezistorul liniar.

Cazuri particulare:

a) rezistorul cu rezistenţă nulă $R = 0$, care are ecuaţia de funcţionare:

$$u = 0, \tag{1.25}$$

se numeşte **conductor perfect** şi are simbolul din figura 1.22.a;

b) rezistorul cu conductanţa nulă $G = 0$, care are ecuaţia de funcţionare:

$$i = 0, \tag{1.26}$$

se numeşte **izolator perfect** şi are simbolul prezentat în figura 1.22.b.

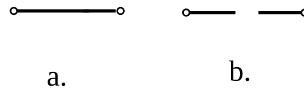


Fig. 1.22.

Puterea absorbită de un rezistor liniar este:

$$p = ui = Ri^2 = Gu^2 \tag{1.27}$$

şi este pozitivă dacă rezistenţa rezistorului este pozitivă. Rezistoarele cu rezistenţa pozitivă $R > 0$ sunt elemente pasive disipative.

2. Bobina ideală este un element dipolar la care tensiunea la borne este egală cu derivata în raport cu timpul a unei funcţii. Valoarea φ a acestei funcţii se numeşte flux de intensitatea curentului electric prin element. Dacă fluxul depinde liniar de intensitatea curentului, atunci bobina se numeşte liniară, caz în care tensiunea la borne este proporţională cu viteza de variaţie în timp a curentului. Simbolul bobinei neliniare este prezentat în figura 1.23.a, iar cel al bobinei liniare în figura 1.23.b.

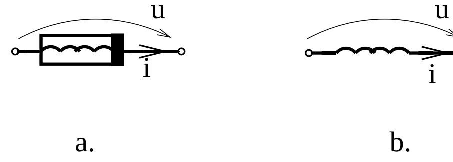


Fig. 1.23.

Ecuaţia constitutivă a bobinei neliniare invariante în timp este:

$$u = \frac{d\varphi(i)}{dt}, \tag{1.28}$$

iar în cazul particular al bobinei liniare $\varphi = Li$, deci:

$$\boxed{u = L\frac{di}{dt},} \tag{1.29}$$

în care L este parametrul caracteristic al bobinei, numit *inductivitate*. Ecuaţiile (1.28) şi (1.29) sunt asociate sensurilor de referinţă din figura 1.23 şi trebuiesc modificate o dată cu modificarea sensurilor de referinţă. De exemplu, pentru figura 1.24 ele au forma:

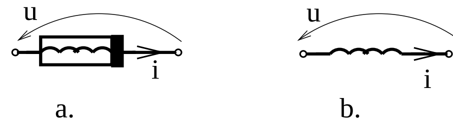


Fig. 1.24.

$$u = -\frac{d\varphi(i)}{dt}, \tag{1.30}$$

în cazul bobinei neliniare şi:

$$\boxed{u = -L\frac{di}{dt},} \tag{1.31}$$

în cazul bobinei liniare.

În cazul în care curentul este constant în timp, bobina ideală se comportă ca un conductor perfect ($u = 0$), situaţie ce are loc şi atunci când inductivitatea este nulă.

Puterea absorbită de o bobină ideală este:

$$p = ui = Li\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2}\right) = \frac{dW}{dt}, \tag{1.32}$$

pozitivă (bobina absoabe energie) sau negativă (bobina generează energie), după cum energia inductorului $W = Li^2/2$ creşte sau scade în timp. Din acest motiv se spune că bobina este element pasiv, acumulator de energie, având ca mărime de stare intensitatea curentului.

3. Condensatorul ideal este un element dipolar la care intensitatea curentului este egală cu derivata faţă de timp a unei funcţii. Valoarea acestei funcţii q se numeşte sarcină de tensiunea electrică la bornele elementului. Dacă sarcina depinde liniar de tensiune, atunci condensatorul se numeşte liniar, caz în care curentul este proporţional cu viteza de variaţie a tensiunii la borne. Simbolul condensatorulului neliniar este prezentat în figura 1.25.a, iar cel al condensatorului liniar în figura 1.25.b.



Fig. 1.25.

Ecuaţia constitutivă a condensatorului neliniar invariant în timp este:

$$i = \frac{dq(u)}{dt}, \tag{1.33}$$

iar a condensatorului liniar invariant în timp este:

$$\boxed{i = C\frac{du}{dt},} \tag{1.34}$$

în care C este parametrul caracteristic al condensatorului numit *capacitate*. Ecuaţiile de funcţionare sunt valabile în cazul sensurilor de referinţă prezentate în

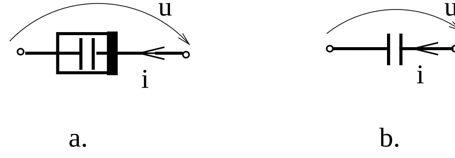


Fig. 1.26.

figura 1.25 şi trebuiesc modificate corespunzător, în cazul schimbării sensurilor de referinţă. De exemplu, pentru figura 1.26 ecuaţiile sunt:

$$i = -\frac{dq(u)}{dt}, \tag{1.35}$$

pentru condensatorul neliniar şi:

$$\boxed{i = -C\frac{du}{dt},} \tag{1.36}$$

în cazul condensatorului liniar.

Dacă tensiunea la bornele condensatorului este constantă în timp, atunci acesta se comportă ca un izolator perfect ($i = 0$), situaţie ce are loc şi atunci când capacitatea condensatorului este nulă.

Puterea absorbită de un condensator ideal este:

$$p = ui = Cu\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Cu^2}{2}\right) = \frac{dW}{dt}, \tag{1.37}$$

pozitivă (condensatorul absoarbe energie) sau negativă (condensatorul debitează energie), după cum energia condensatorului $W = Cu^2/2$ creşte sau scade în timp. Condensatorul este un element pasiv acumulator de energie, având ca mărime de stare tensiunea la borne.

4. Generatorul ideal de tensiune este un element pasiv dipolar la care tensiunea la borne nu depinde de intensitatea curentului prin element (putând fi în schimb funcţie de timp). Simbolurile utilizate pentru generatorul ideal de tensiune sunt prezentate în figura 1.27; borna din dreapta se numeşte borna "plus", iar cea din stânga borna "minus".

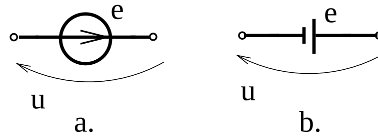


Fig. 1.27.

Ecuaţia constitutivă a generatorului ideal de tensiune, pentru sensul tensiunii adoptat în figura 1.27, este:

$$\boxed{u = e(t),} \tag{1.38}$$

în care mărimea e este parametrul caracteristic al generatorului ideal de tensiune şi se numeşte *tensiune electromotoare*. Dacă tensiunea la borne are sensul de referinţă de la borna minus la borna plus a generatorului ca în figura 1.28, atunci ecuaţia de funcţionare devine:

$$\boxed{u = -e(t).} \tag{1.39}$$

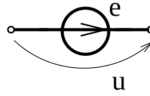


Fig. 1.28.

Generatorul de tensiune electromotoare nulă are ecuaţia de funcţionare $u = 0$ şi în consecinţă se comportă ca un conductor perfect.

Puterea transferată pe la bornele unui generator ideal de tensiune este:

$$p = ui = ei, \tag{1.40}$$

putând fi pozitivă sau negativă, în funcţie de sensul curentului. Deoarece acest element poate produce energie se spune că generatorul ideal de tensiune este un element activ.

5. Generatorul ideal de curent este un element dipolar la care intensitatea curentului ce-l străbate nu depinde de tensiunea la bornele elementului. Simbolul utilizat pentru generatorul ideal de curent este prezentat în figura 1.29 (borna din dreapta se numeşte borna "plus", iar borna din stânga se numeşte borna "minus" a generatorului).

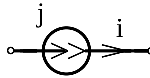


Fig. 1.29.

Ecuaţia constitutivă a generatorului ideal de curent, pentru sensul de referinţă adoptat în figura 1.29, este:

$$\boxed{i = j(t),} \tag{1.41}$$

în care mărimea j este parametrul caracteristic al generatorului ideal de curent şi se numeşte *curent electromotor*. Dacă intensitatea curentului are sensul de referinţă opus dublei săgeţi ca în figura 1.30, atunci ecuaţia de funcţionare devine:

$$\boxed{i = -j(t).} \tag{1.42}$$

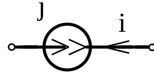


Fig. 1.30.

Generatorul ideal de curent ce are curentul electromotor nul are ecuaţia de funcţionare $i = 0$ şi în consecinţă se comportă ca un izolator perfect.

Puterea transferată pe la borne de un generator ideal de curent este:

$$p = ui = uj, \tag{1.43}$$

putând fi negativă sau pozitivă, în funcţie de tensiunea aplicată la borne. Generatorul ideal de curent este deci un element activ din punct de vedere energetic.

6. Generatoarele comandate sunt generatoare ideale de curent sau tensiune al căror curent electromotor respectiv tensiune electromotoare sunt funcţii de intensitatea curentului sau de tensiunea electrică dintr-o latură a circuitului, alta decât aceea în care se află elementul comandat. Se deosebesc patru tipuri de surse comandate liniar (cu simbolurile din figura 1.31), ale căror ecuaţii de funcţionare sunt:

$$\boxed{u_2 = \rho i_1,} \tag{1.44}$$

pentru *sursa de tensiune comandată în curent* (fig 1.31.a),

$$\boxed{u_2 = \alpha u_1,} \tag{1.45}$$

pentru *sursa de tensiune comandată în tensiune* (fig 1.31.b),

$$\boxed{i_2 = \beta i_1,} \tag{1.46}$$

pentru *sursa de curent comandată în curent* (fig 1.31.c), şi

$$\boxed{i_2 = \gamma i_1.} \tag{1.47}$$

pentru *sursa de curent comandată în tensiune* (fig 1.31.d).

Pentru cele patru tipuri de surse comandate, parametrii caracteristici sunt: $\rho[\Omega]$ rezistenţa de transfer; α coeficientul de transfer al tensiunii; β coeficientul de transfer al curentului şi $\gamma[S]$ conductanţa de transfer. Coeficienţii de transfer α şi β sunt adimensionali.

7. Bobinele cuplate reprezintă un sistem de bobine cu proprietatea că fluxul din fiecare depinde de curenţii prin toate bobinele sistemului. Ecuaţia de funcţionare a bobinei k dintr-un sistem de m bobine cuplate este:

$$u_k = \frac{d}{dt}\varphi(i_1, i_2, ..., i_m). \tag{1.48}$$

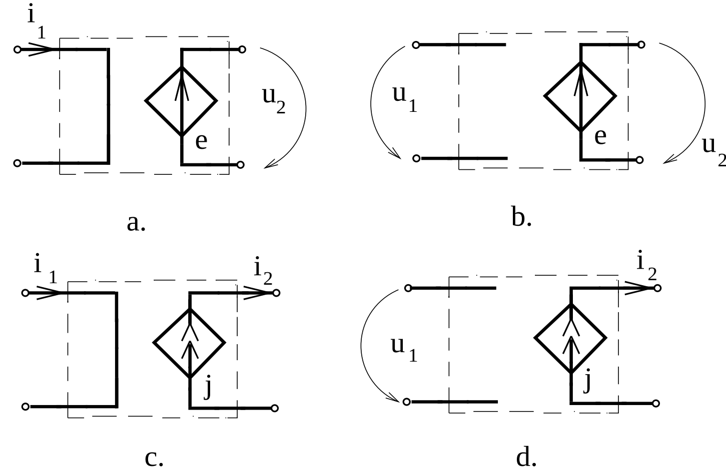


Fig. 1.31.

În cazul bobinelor cuplate liniar, fluxul este o combinaţie liniară a curenţilor, iar ecuaţia de funcţionare devine:

$$\boxed{u_k = \sum_{j=1}^{m} L_{kj} \frac{di_j}{dt},} \tag{1.49}$$

în care suma este aritmetică pentru orientările prezentate în figura 1.32, şi anume dacă asocierea sensurilor se face după regula de la receptoare şi dacă toţi curenţii au sensurile de referinţă intrând în borna polarizată. Parametrii unui sistem de bobine liniare cuplate sunt inductivitaţile L_{kj} ce alcătuiesc o matrice pătrată de ordin m numită *matricea inductivităţilor*. Termenii diagonali ai matricii L se numesc *inductivităţi proprii*, iar termenii nediagonali se numesc *inductivităţi mutuale*.

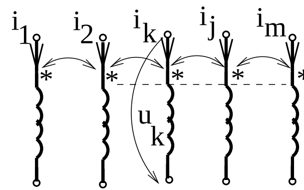


Fig. 1.32.

Dacă sensurile de referinţă nu sunt conform celor din figura 1.32, atunci ecuaţia de funcţionare se modifică în mod corespunzător, suma devenind o sumă algebrică.

Regula de determinare a semnului termenului j din această sumă, se bazează pe observaţia că, orice curent i_j care **intră** intr-o bornă polarizată induce, prin cuplaj, în bobina k o tensiune la borne $L_{kj}(di_j/dt)$, cu sensul de referinţă orientat de la borna polarizată către cealaltă bornă (prin abuz de limbaj se spune că ea **intră** în borna polarizată). Dacă intensitatea i_j **iese** din borna polarizată, atunci ea induce în bobina k o tensiune la borne $L_{kj}(di_j/dt)$ cu sensul de referinţă orientat de la cealaltă bornă spre borna polarizată (prin abuz de limbaj se spune că **iese** din borna polarizată). Această regulă de semn este exemplificată în figura 1.33 în care se constată că semnul tensiunii induse depinde de sensul de referinţă al curentului inductor (i_1) dar nu depinde de sensul de referinţă al curentului indus (i_2).

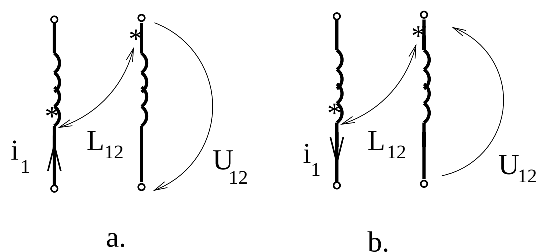


Fig. 1.33.

Marcajele pentru bornele polarizate nu au semnificaţie fizică dar ele sunt necesare în cazul sistemelor de bobine cuplate, deoarece ele definesc valoarea (mai exact semnul) inductivităţilor mutuale, urmând ca schimbarea unei borne polarizate la bobina k să determine modificarea semnului tuturor inductivităţilor mutuale (de cuplaj) ale bobinei k (sunt afectate linia k şi coloana k din matricea $[L_{ij}]$, a inductivităţilor cu excepţia termenului diagonal).

Formularea corectă a circuitelor cu elemente ideale. Cu ajutorul elementelor ideale de circuit prin conexiuni pe la borne se alcătuiesc circuite electrice. Nu orice mod de conexiune a elementelor ideale este permis în teoria circuitelor; trebuie avut grijă ca ecuaţiile de funcţionare să fie compatibile cu ecuaţiile Kirchhoff. Dacă ele sunt incompatibile, analiza circuitului este fără sens, neexistând o soluţie care să verifice ecuaţiile circuitului. Dacă un circuit electric conţine generatoare ideale de tensiune ce alcătuiesc bucle, atunci, pentru valori arbitrare ale tensiunilor electromotoare, acestea pot fi în contradicţie cu ecuaţia a doua a lui Kirchhoff. Dacă un circuit conţine secţiuni alcătuite din generatoare ideale de curent, atunci, pentru valori arbitrare ale curenţilor electromotori, acestea pot fi în contradicţie cu prima ecuaţie a lui Kirchhoff. Circuitele ce conţin bucle de generatoare ideale de tensiune sau secţiuni de generatoare ideale de curent se numesc circuite cu **generatoare în exces**. Atunci când generatoarele în exces contravin ecuaţiilor lui Kirchhoff **circuitul este incompatibil**. Chiar dacă

generatoarele în exces nu contravin ecuaţiilor lui Kirchhoff, totuşi analiza unui astfel de circuit nu poate fi completă deoarece el nu are soluţie unică: curenţii din generatoarele ideale de tensiune în exces şi tensiunile din generatoarele ideale de curent în exces sunt mărimi arbitrare (nu pot fi determinate din ecuaţiile circuitului). În acest caz se spune că circuitul este nedeterminat. Condiţia ca într-un circuit să nu existe generatoare în exces este ca circuitul să aibă un arbore în ramurile căruia să se afle toate generatoarele ideale de tensiune, iar generatoarele ideale de curent să se afle în coarbore. La analiza unui circuit în vederea determinării generatoarelor în exces nu trebuie uitat faptul că izolatorul perfect este un generator ideal de curent ($j = 0$), iar conductorul perfect este un generator ideal de tensiune ($e = 0$). Analiza circuitelor cu generatoare compatibile în exces se reduce la analiza circuitelor fără generatoare în exces, prin înlocuirea generatoarelor ideale de tensiune în exces (câte unul pentru fiecare buclă) cu generatoare ideale de curent, având curenţi electromotori nedeterminaţi şi prin înlocuirea generatoarelor ideale de curent în exces (câte unul pentru fiecare secţiune) cu generatoare ideale de tensiune având tensiuni electromotoare nedeterminate.

Bilanţul puterilor în reţelele electrice este o consecinţă directă a teoremei lui Tellegen şi a ecuaţiilor constitutive ale elementelor şi reprezintă ecuaţia de egalitate între suma puterilor debitate de generatoarele reţelei P_g şi puterile absorbite de elementele pasive P_c. Pentru reţelele liniare ecuaţia de bilanţ este :

$$\boxed{P_g = P_c;} \tag{1.50}$$

unde:

$$\begin{aligned} P_g &= \sum_{k=1}^{n_{gt}} e_k i_k + \sum_{k=1}^{n_{gc}} u_k j_k; \\ P_c &= \sum_{k=1}^{n_R} R_k i_k^2 + \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=1}^{n_C} \frac{C_k u_k^2}{2} + \sum_{k=1}^{n_L}\sum_{m=1}^{n_L} \frac{L_{km} i_k i_m}{2}\right], \end{aligned} \tag{1.51}$$

în care n_{gt} este numărul generatoarelor ideale de tensiune, n_{gc} este numărul generatoarelor de curent, n_R este numărul rezistoarelor, n_C este numărul condensatoarelor, iar n_L este numărul bobinelor din reţea. Primele două sume sunt sume algebrice, convenţia de semn fiind prezentată în figura 1.34. În cazul a. termenii se consideră cu semnul plus, iar in cazul b. ei se consideră cu semnul minus.

Sumele corespunzătoare rezistoarelor, condensatoarelor şi inductivităţilor proprii sunt sume aritmetice dar termenii corespunzători inductivităţilor mutuale se consideră în suma algebrică, convenţia de semn fiind semnul plus atunci când cei doi curenţi au aceeaşi poziţie faţă de bornele polarizate (ambii intră sau ambii ies ca în figura 1.35.a, 1.35.b) şi semnul minus atunci când cei doi curenţi au poziţii inverse faţă de bornele polarizate (unul intră şi altul iese ca în figura 1.35.c) .

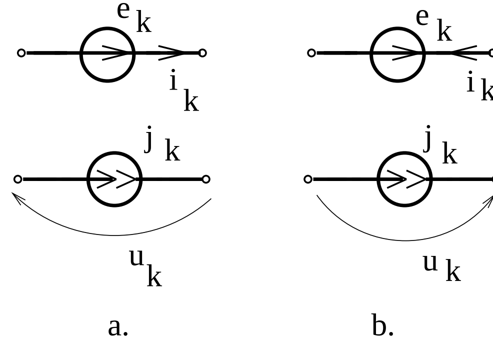


Fig. 1.34.

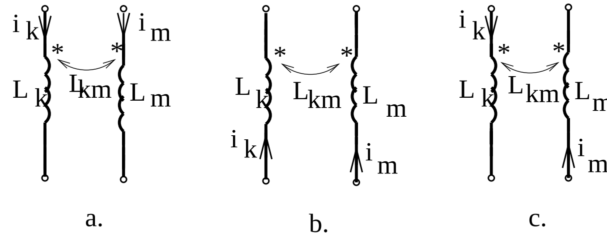


Fig. 1.35.

PROBLEME

1.4.1. Să se reprezinte grafic variaţia intensităţii i în funcţie de tensiunea u la bornele rezistorului neliniar, pentru diverse sensuri de referinţă, pornind de la faptul că graficul din figura 1.4.1.a corespunde sensurilor din figura 1.4.1.b.

1.4.2. Să se determine mărimile necunoscute corespunzătoare rezistoarelor liniare din figura 1.4.2.

1.4.3. Să se calculeze tensiunea $u(t)$ la bornele unei bobine ideale presupunând că ea este parcursă de unul din curenţii:

a) $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$;
b) $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$;
c) $i(t) = I_0$,

dacă fluxul bobinei $\varphi(i)$ este dat de una din funcţiile:

a) $\varphi = a_1 \cdot \mathrm{arctg} a_2 i + L_0 i \sin(\omega_0 t)$;
b) $\varphi = \dfrac{i}{a + b|i|}$;
c) $\varphi = a \cdot \mathrm{th}(bi)$;
d) $\varphi = \dfrac{L_0 i}{1 + \alpha \sin(\omega_0 t)}$;
e) $\varphi = Li$.

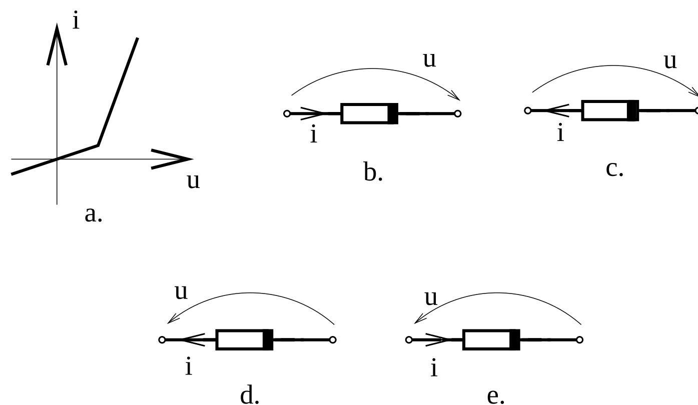


Fig. 1.4.1.

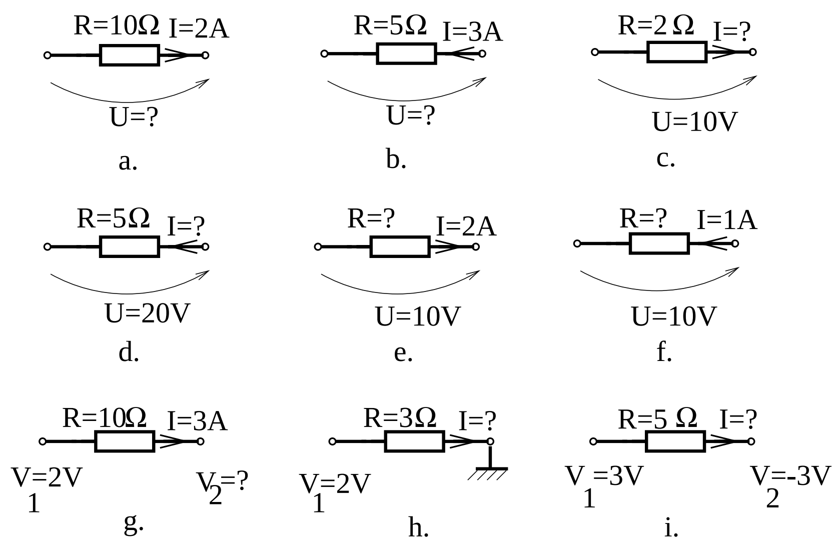


Fig. 1.4.2.

Să se exprime tensiunea la bornele bobinei pentru cele patru modalităţi de asociere a sensurilor de referinţă ale tensiunii şi curentului. Să se calculeze puterea transferată pe la bornele bobinei.

1.4.4. Să se calculeze intensitatea curentului electric ce străbate o bobină ideală, dacă aceasta are la borne tensiunea:

a) $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$;
b) $u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$;
c) $u(t) = U_0$;
d) $u(t) = 0$,

atunci când fluxul bobinei $\varphi(i)$ este dat de una din funcţiile:

a) $\varphi = a \cdot \mathrm{arctg}(bi)$;
b) $\varphi = Li$.

Să se calculeze puterea transferată pe la bornele bobinei. Să se discute rezultatul în funcţie de constanta de integrare.

1.4.5. Să se calculeze intensitatea curentului ce străbate un condensator ideal alimentat la tensiunea:

a) $u(t) = U_0 \sin(\omega t)$;
b) $u(t) = U_0 e^{-t/\tau}$;
c) $u(t) = U_0$,

atunci când sarcina condensatorului $q(u)$ depinde de tensiunea u conform relaţiilor:

a) $q = a_1 \cdot \mathrm{arctg}(a_2 u)$;
b) $q = \dfrac{au}{1 + \alpha \sin(\omega_0 t)}$;
c) $q = Cu$.

Să se calculeze puterea transferată pe la bornele condensatorului.

1.4.6. Să se calculeze tensiunea la bornele unui condensator străbatut de curentul:

a) $i(t) = I_0 \sin(\omega t)$;
b) $i(t) = I_0 e^{-t/\tau}$;
c) $i(t) = I_0$;
d) $i(t) = 0$,

presupunând că sarcina condensatorului $q(u)$ depinde de tensiune conform relaţiilor:

a) $q = a_1 \cdot \mathrm{arctg}(a_2 u)$;
b) $q = Cu$.

Să se calculeze puterea transferată pe la borne, discutându-se în funcţie de constanta de integrare.

1.4.7. Să se calculeze mărimile necunoscute la generatoarele ideale prezentate în figura 1.4.3.

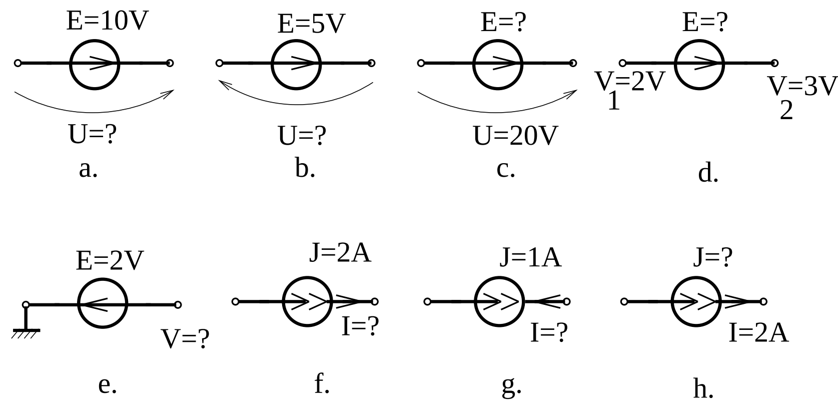


Fig. 1.4.3.

1.4.8. Să se calculeze puterile transferate pe la bornele generatoarelor din figura 1.4.4 şi să se indice sensul acestora.

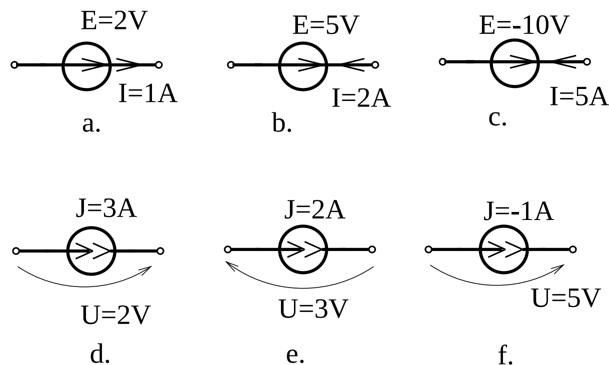


Fig. 1.4.4.

1.4.9. Să se calculeze tensiunile la bornele bobinelor liniare cuplate magnetic prezentate în figura 1.4.5.

1.4.10. Să se studieze influenţa pe care o are asupra ecuaţiilor modificarea poziţiei unei borne polarizate la bobinele din figura 1.4.5.

1.4.11. Să se calculeze puterea absorbită de perechile de bobine cuplate prezentate în figura 1.4.5.

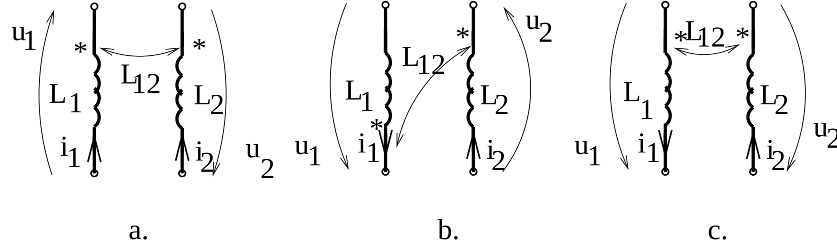


Fig. 1.4.5.

1.4.12. Să se determine condiţiile care trebuie îndeplinită de inductivităţile proprii şi mutuale ale unui sistem de bobine, astfel încât energia asociată sistemului să fie pozitivă, oricare ar fi semnele curenţilor.

1.4.13. Să se calculeze tensiunile la bornele bobinelor liniare cuplate prezentate în figura 1.4.6, pentru:
$i_1 = I_{01}\sin(\omega t)$, $i_2 = I_{02}\cos(\omega t)$;
$L_1 = L_2 = 0.1H$, $L_{12} = L_1/2$.

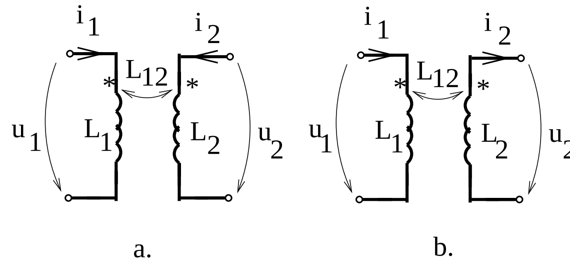


Fig. 1.4.6.

1.4.14. Să se calculeze intensităţile curenţilor prin bobinele liniare cuplate din figura 1.4.6, pentru:
$u_1 = U_{01}\sin(\omega t)$, $u_2 = U_{02}\cos(\omega t)$;
$L_1 = L_2 = 0.1H$, $L_{12} = L_1/2$.
Problema va fi rezolvată in două variante:
a) $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$;
b) $i_1(0) = I_{10}$, $i_2(0) = I_{20}$.
Să se calculeze puterea absorbită de sistemul de bobine.

1.4.15. Să se determine parametrii elementelor ideale ale reţelelor din figura 1.4.7, ştiind că aceste reţele admit drept grafuri de tensiune şi curent grafurile

reprezentate în aceeaşi figură. Să se verifice bilanţul puterilor.

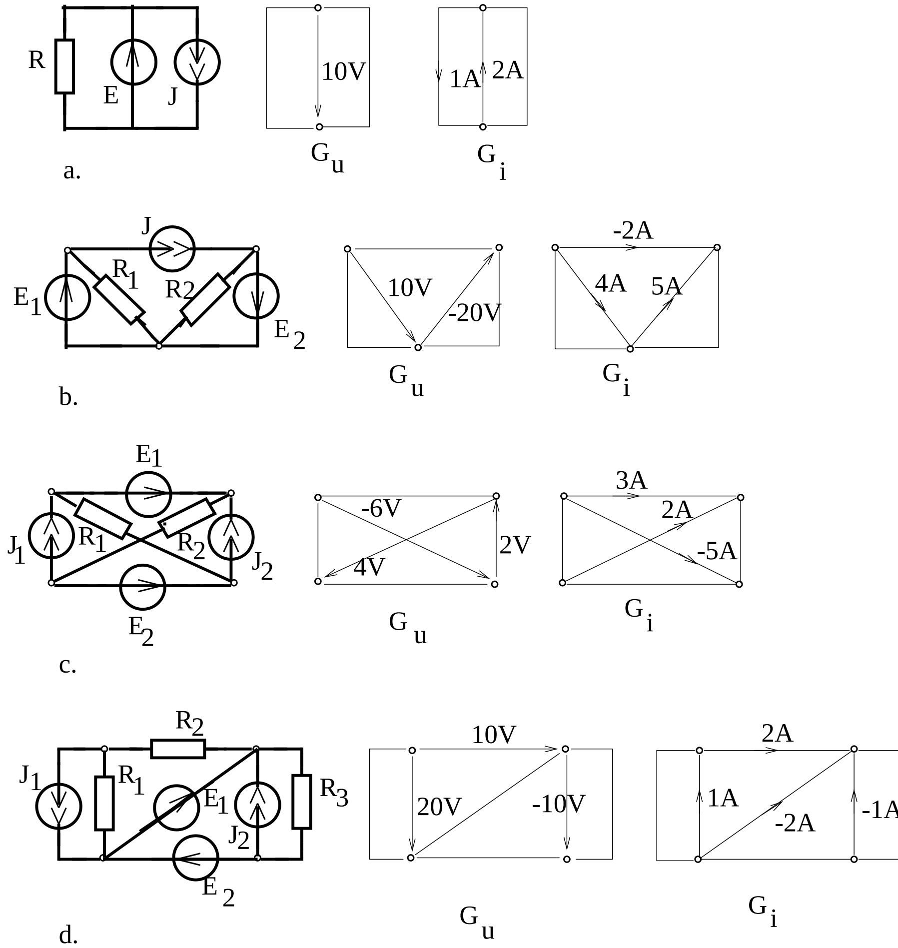


Fig. 1.4.7.

1.4.16. Să se determine generatoarele în exces din reţelele prezentate în figura 1.4.8. Care sunt condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească parametrii generatoarelor pentru ca reţelele să fie compatibile ?

1.4.17. Se consideră reţelele prezentate în figura 1.4.9. Pentru fiecare reţea să se determine un arbore în ramurile căruia se află doar generatoare ideale de tensiune. Aplicând a doua teoremă a lui Kirchhoff, să se determine tensiunile din coarde. Prin aplicarea ecuaţiilor de funcţionare ale elementelor din coarde, să se determine curenţii din coarbore şi apoi curenţii din ramuri. Să se verifice bilanţul puterilor.

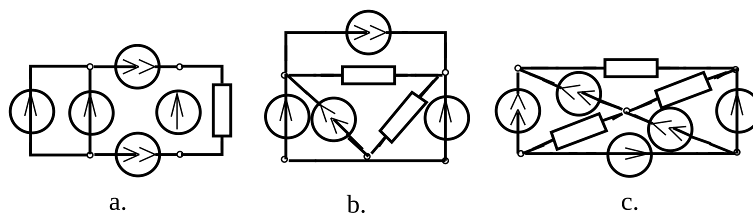
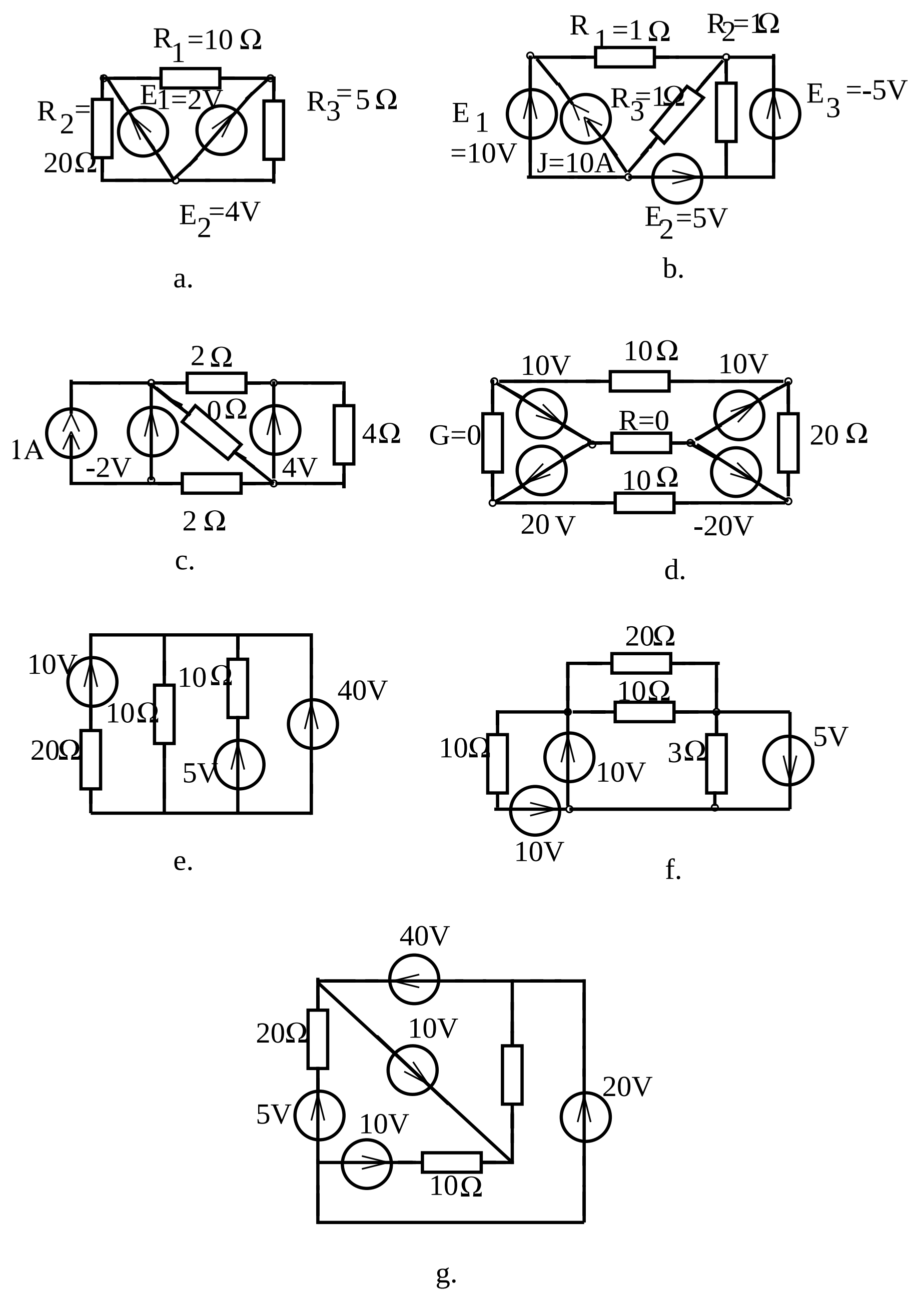


Fig. 1.4.8.

1.4.18. Se consideră reţelele prezentate în figura 1.4.11. Pentru fiecare reţea să se determine un coarbore în coardele căruia se află doar generatoare ideale de curent. Prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff, să se determine curenţii din arbore. Aplicând ecuaţiile caracteristice ale elementelor din ramuri să se calculeze tensiunile din arbore. Să se determine tensiunile din coarbore. Să se verifice bilanţul puterilor.

1.4.19. Să se reprezinte grafurile complete de tensiune şi curent ale reţelelor reprezentate în figura 1.4.10. Să se verifice bilanţul puterilor. Pentru rezolvare se va folosi algoritmul convenabil dintre cei prezentaţi în problemele 1.4.9 şi 1.4.11.



R1=10 Ω
R2=
20Ω
E1=2V
R3=5 Ω
E2=4V
a.
R1=1 Ω
R2=1Ω
R3=1Ω
E1
=10V
J=10A
E3=-5V
E2=5V
b.
2 Ω
0Ω
1A
-2V
4V
4Ω
2 Ω
c.
10V
10 Ω
10V
G=0
R=0
20 Ω
10 Ω
20 V
-20V
d.
10V
10Ω
10Ω
40V
20Ω
5V
e.
20Ω
10Ω
10Ω
10V
3Ω
5V
10V
f.
40V
20Ω
10V
5V
10V
20V
10Ω
g.

Fig. 1.4.9.

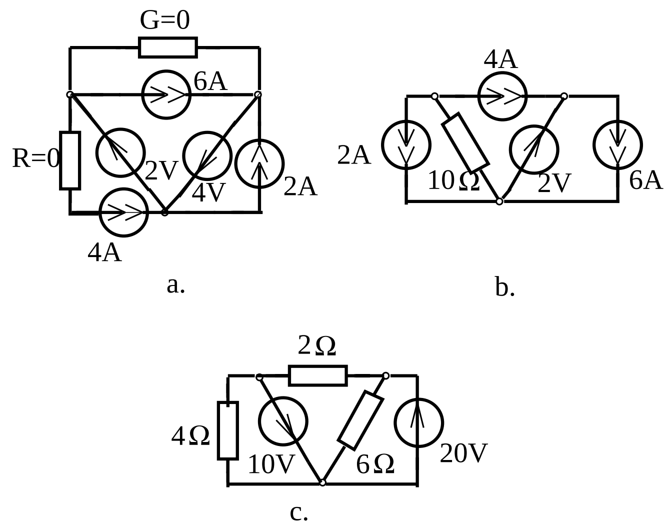


Fig. 1.4.10.

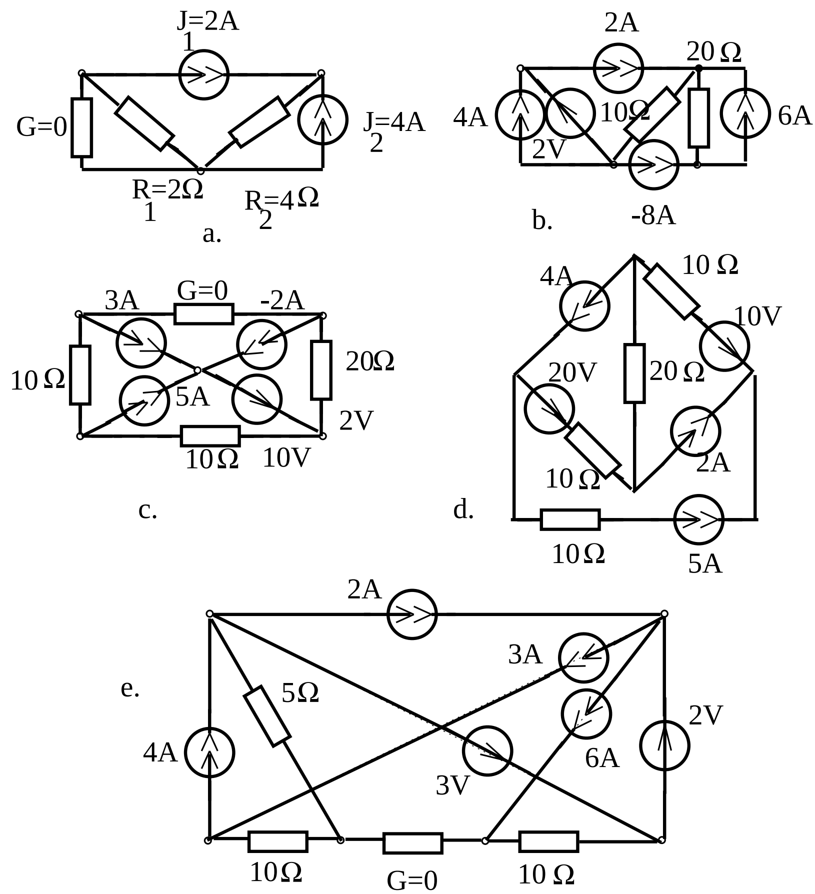


Fig. 1.4.11.

Capitolul 2

Circuite electrice rezistive liniare

2.1 Teoreme de echivalenţă

BREVIAR

Două elemente dipolare de circuit electric sunt *echivalente* dacă au ecuaţii caracteristice identice, respectiv dacă elementele impun aceeaşi relaţie între tensiunea la borne şi curentul prin element.

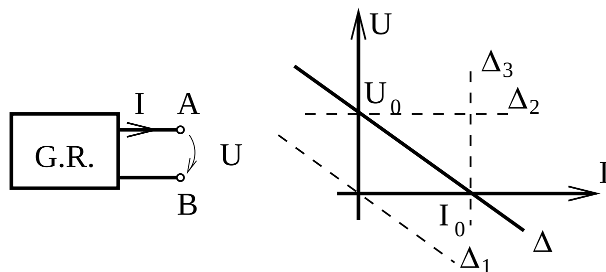


Fig. 2.1.

Un element dipolar de circuit electric se numeşte **generator real** dacă reprezentarea grafică a ecuaţiei caracteristice în planul U, I este o dreaptă ce intersectează ambele axe (dreapta Δ figura 2.1).

Elementele rezistor liniar ideal, generator ideal de tensiune şi generator ideal de curent sunt cazuri limită ale generatorului real şi anume: dreapta Δ_1 trece prin origine; dreapta Δ_2 este paralelă cu axa curentului, respectiv dreapta Δ_3 paralelă cu axa tensiunii. În cazul izolatorului perfect dreapta Δ se identifică cu axa tensiunii, iar în cazul conductorului perfect ea se identifică cu axa curentului.

Intersecţia dreptei caracteristice a unui generator real cu axele determină cei doi parametri caracteristici ai generatorului. *Tensiunea de mers în gol* este tensiunea $U_0 = U(0)$ pentru un curent nul prin generator. *Curentul de scurtcircuit*

este curentul I_0 ce străbate generatorul real atunci când tensiunea la bornele sale este nulă.

Generatorul real admite schemele echivalente alcătuite din elemente ideale prezentate în figura 2.2.

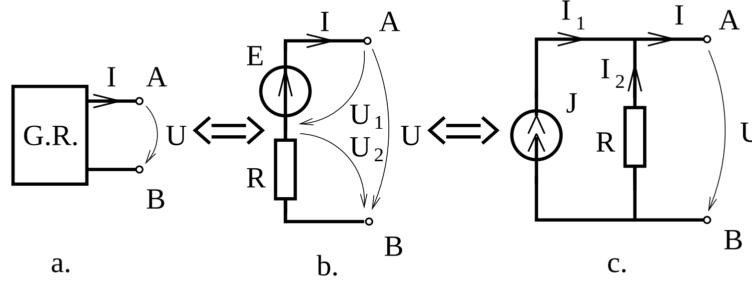


Fig. 2.2.

Circuitul dipolar realizat dintr-un generator ideal de tensiune înseriat cu un rezistor (fig. 2.2.b) se numeşte **generator real de tensiune**. Un generator real de tensiune caracterizat de parametrii (E,R), în care E se numeşte *tensiune electromotoare a generatorului* real de tensiune, iar R se numeşte *rezistenţă internă* a generatorului real de tensiune.

Circuitul dipolar realizat dintr-un generator ideal de curent în paralel cu un rezistor (fig. 2.2.c) se numeşte **generator real de curent**. Un generator real de curent este caracterizat de parametrii (J,R) în care J se numeşte *curentul electromotor* al generatorului, iar R se numeşte *rezistenţa sa internă.*

Următoarele afirmaţii permit evidenţierea echivalenţei între elementele introduse. Un generator real este echivalent cu un generator real de tensiune dacă tensiunea de mers în gol a generatorului real este egală cu tensiunea electromotoare a generatorului real de tensiune $U_0 = E$ iar rezistenţa internă a generatorului real de tensiune este egală cu raportul dintre tensiunea de mers în gol şi curentul de scurtcircuit $R = U_0/I_0$. Pentru demonstrarea acestei afirmaţii, este suficient să se aplice a doua teoremă a lui Kirchhoff în figura 2.2.b:

$$U = U_1 + U_2 = E - RI, \tag{2.1}$$

obţinându-se ecuaţia de funcţionare a generatorului real de tensiune care este o funcţie afină al cărei grafic este o dreaptă ce intersectează axele în punctele $U_0 = E$ şi $I_0 = U_0/R$.

Analizând ecuaţia de funcţionare (2.1) rezultă că un generator real de tensiune degenerează într-un generator ideal de tensiune dacă rezistenţa internă $R = 0$, sau poate degenera într-un rezistor dacă tensiunea electromotoare E se anulează. Din acest motiv se spune că generatorul ideal de tensiune are rezistenţa internă nulă.

Un generator real este echivalent cu un generator real de curent având curentul electromotor egal cu curentul de scurtcircuit al generatorului real şi rezistenţa internă egală cu raportul dintre tensiunea de mers în gol şi curentul de scurtcircuit $R = U_0/I_0$. Pentru demonstraţie, se aplică prima teoremă a lui Kirchhoff în figura 2.2.c:

$$I = I_1 + I_2 = J - \frac{U}{R}, \tag{2.2}$$

obţinându-se ecuaţia de funcţionare a generatorului real de curent, ca o funcţie afină al cărei grafic este o dreaptă având tăieturile : $I_0 = J$ şi $U_0 = RJ$.

Analizând relaţia (2.2) rezultă că un generator real de curent poate degenera într-un generator ideal de curent dacă rezistenţa internă $R \to \infty$ (conductanţa internă $G = 1/R$ se anulează), sau poate degenera într-un rezistor atunci când se anulează curentul electromotor $J = 0$. Din acest motiv se spune că rezistenţa internă a unui generator ideal de curent este infinită.

Ca o consecinţă a acestor afirmaţii rezultă **teorema de echivalenţă dintre un generator real de tensiune şi un generator real de curent** care afirmă că circuitele din figura 2.2.b şi 2.2.c sunt echivalente dacă au aceeaşi rezistenţă internă şi dacă:

$$\boxed{\begin{array}{c} J = E/R; \\ E = RJ. \end{array}} \tag{2.3}$$

Condiţia de echivalenţă dintre cele două generatoare este o consecinţă a tranzitivităţii relaţiei de echivalenţă sau poate fi obţinută prin identificarea relaţiilor de funcţionare (2.1) şi (2.2).

Importanţa practică a teoremelor de echivalenţă constă în faptul că, dacă se înlocuieşte într-o reţea un element dipolar (sau o subreţea dipolară) cu un element echivalent, atunci curenţii şi tensiunile din restul reţelei nu se modifică. Această observaţie permite simplificarea reţelelor electrice prin transfigurări succesive.

Generatoare reale de tensiune conectate în serie. Un grup de n generatoare reale de tensiune cu parametrii (E_k, R_k) k=1...n, conectate în serie (fig. 2.3) este echivalent cu un generator real de tensiune având tensiunea electromotoare:

$$\boxed{E = \sum_{k=1}^{n} E_k} \tag{2.4}$$

şi rezistenţa internă:

$$\boxed{R = \sum_{k=1}^{n} R_k.} \tag{2.5}$$

Suma (2.4) este algebrică, în sensul că se trec cu plus termenii E_k dacă au acelaşi sens cu tensiunea electromotoare echivalentă E şi se trec cu minus tensiunile electromotoare care au sens opus.

Ţinând cont că un generator real de tensiune degenerează într-un rezistor ideal sau într-un generator ideal dacă E=0 sau respectiv dacă R=0, rezultă că relaţia

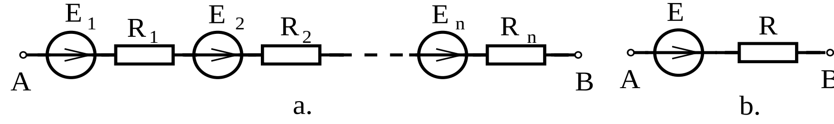


Fig. 2.3.

(2.4) permite calculul tensiunii electromotoare echivalente în cazul generatoarelor ideale conectate în serie, iar relaţia (2.5) permite calculul rezistenţei echivalente în cazul rezistoarelor conectate în serie.

Generatoare reale de tensiune conectate în paralel. Un grup de n generatoare reale de tensiune cu parametrii (E_k, R_k), k=1...n, conectate în paralel (fig. 2.4) este echivalent cu un generator de tensiune având tensiunea electromotoare:

$$\boxed{E = \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{E_k}{R_k}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}} \tag{2.6}$$

şi rezistenţa internă:

$$\boxed{R = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}.} \tag{2.7}$$

Suma de la numărătorul relaţiei (2.6) este algebrică, în sensul că se trec cu plus tensiunile electromotoare E_k dacă au acelaşi sens cu tensiunea electromotoare echivalentă E şi se trec cu minus tensiunile electromotoare care au sensuri opuse tensiunii electromotoare echivalente.

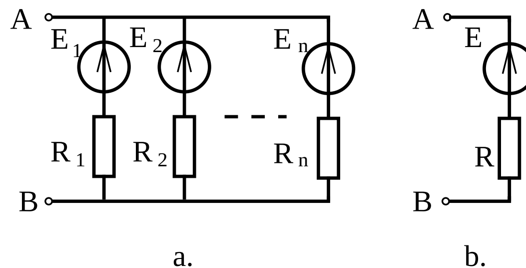


Fig. 2.4.

Relaţia (2.6) exprimă faptul că tensiunea electromotoare echivalentă E este

media ponderată a tensiunilor E_k cu ponderile $G_k = 1/R_k$:

$$E = \frac{\sum_{k=1}^{n} E_k G_k}{\sum_{k=1}^{n} G_k}. \tag{2.8}$$

Cu notaţia $G = 1/R$, rezultă pentru conductanţa internă expresia:

$$\boxed{G = \sum_{k=1}^{n} G_k;} \tag{2.9}$$

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}.} \tag{2.10}$$

Prezintă interes practic următoarele cazuri particulare:

a) rezistoare conectate în paralel (E_k=0):

$$G = \sum_{k=1}^{n} G_k, \quad E = 0; \tag{2.11}$$

b) rezistenţe interne egale ($R_k = R_0$):

$$E = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E_k, \quad R = \frac{R_0}{n}, \tag{2.12}$$

situaţie în care tensiunea electromotoare echivalentă este media aritmetică a tensiunilor electromotoare E_k, iar rezistenţa internă este de n ori mai mică decât cea a fiecărui rezistor;

c) una din rezistenţele interne nulă ($R_1 = 0, G_1 \to \infty$):

$$E = E_1, \quad R = 0; \tag{2.13}$$

d) mai multe rezistenţe interne nule generează o nedeterminare ce se explică prin faptul că reţeaua este incompatibilă dacă tensiunile electromotoare sunt diferite;

e) cazul a două surse conectate în paralel (n=2):

$$E = \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{R_1 + R_2}, \quad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{2.14}$$

Din cazul particular **c** rezultă că un generator ideal de tensiune electromotoare E, conectat în paralel cu un generator real, este echivalent cu generatorul ideal de tensiune electromotoare E. Afirmaţia este valabilă şi pentru conductorul perfect deoarece acesta este un caz particular de generator ideal de tensiune (fig. 2.7.a).

Generatoare reale de curent conectate în paralel. Un grup de n generatoare reale de curent cu parametrii (J_k, R_k), k=1...n, conectate în paralel (fig. 2.5) este echivalent cu un generator real de curent având curentul electromotor:

$$\boxed{J = \sum_{k=1}^{n} J_k} \tag{2.15}$$

şi conductanţa internă:

$$\boxed{G = \sum_{k=1}^{n} G_k,} \tag{2.16}$$

sau echivalent

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}.} \tag{2.17}$$

Suma (2.15) este o sumă algebrică, în care termenii J_k se trec cu plus dacă au acelaşi sens faţă de curentul electromotor echivalent J şi cu minus în caz contrar.

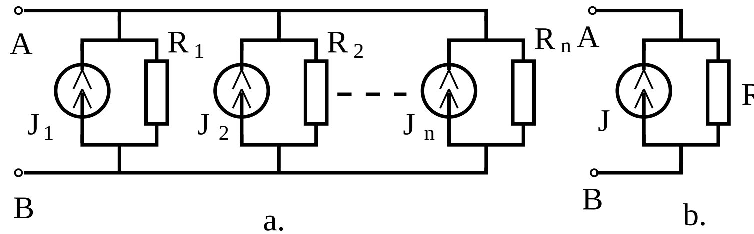


Fig. 2.5.

Ţinând cont că un generator real de curent degenerează într-un generator ideal de curent atunci când $G_k = 0$ $(R_k \to \infty)$, rezultă că relaţia (2.15) poate fi utilizată la calculul curentului electromotor echivalent generatoarelor ideale de curent conectate în paralel.

Generatoare reale de curent conectate în serie. Un grup de n generatoare reale de curent cu parametrii (J_k, R_k), k=1...n, conectate în serie (fig. 2.6), este echivalent cu un generator real de curent având curentul electromotor:

$$\boxed{J = \frac{\sum_{k=1}^{n} J_k R_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k}} \tag{2.18}$$

şi rezistenţa internă:

$$\boxed{R = \sum_{k=1}^{n} R_k.} \tag{2.19}$$

Suma de la numărătorul relaţiei (2.18) este o sumă algebrică în sensul că se trec cu plus curenţii J_k dacă sunt în sensul curentului echivalent J şi cu minus în caz contrar.

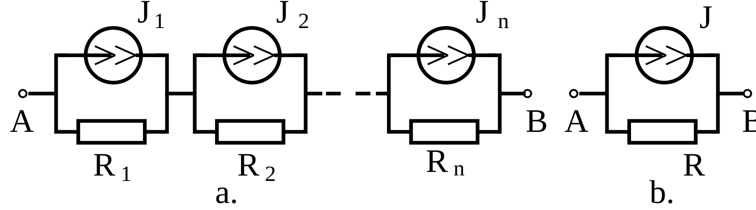


Fig. 2.6.

Relaţia (2.18) exprimă faptul că, pentru generatorul echivalent, curentul electromotor este media ponderată a curenţilor electromotori J_k, având drept ponderi rezistenţele R_k.

Se constată că, atunci când se consideră n generatoare ideale de curent în serie ($R_k \to \infty$), relaţia (2.18) generează o nedeterminare care poate fi explicată prin faptul că acest circuit este incompatibil pentru curenţi electromotori diferiţi.

Dacă un singur generator are rezistenţa internă infinită (este generator ideal), atunci curentul electromotor echivalent este egal cu curentul electromotor al acestui generator iar rezistenţa internă echivalentă este infinită. Rezultă că un generator ideal de curent J conectat în serie cu un generator real este echivalent cu generatorul ideal de curent J (fig. 2.7.b). Afirmaţia este valabilă şi pentru izolatorul perfect care este un caz limită al generatorului ideal de curent.

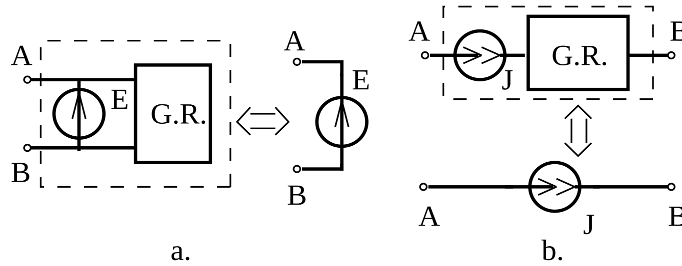


Fig. 2.7.

În anumite situaţii, conceptul de element dipolar de circuit nu este suficient şi este necesară utilizarea *elementului multipolar de circuit electric*, definit ca un domeniu spaţial ce interacţionează electric cu exteriorul prin intermediul a n borne. Caracterizarea stării unui multipol se face cu ajutorul celor n curenţi I_1, I_2,...,I_n, unde k=1...n, injectaţi în borne şi a celor (n-1) tensiuni U_{1n}, U_{2n},...,$U_{n-1,n}$.

Echivalenţa între doi multipoli trebuie înţeleasă în sensul că ei impun aceeaşi relaţie între curenţii şi tensiunile la borne.

Echivalenţa stea-poligon complet. Condiţia ca un multipol cu n borne, cu o structură internă în stea (fig. 2.8.a), să fie echivalent la borne cu un multipol având structura internă de tip poligon complet (fig. 2.8.b) este:

$$\boxed{G_{kj} = \frac{G_k G_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} G_i};} \tag{2.20}$$

$$\boxed{E_{kj} = E_k - E_j.} \tag{2.21}$$

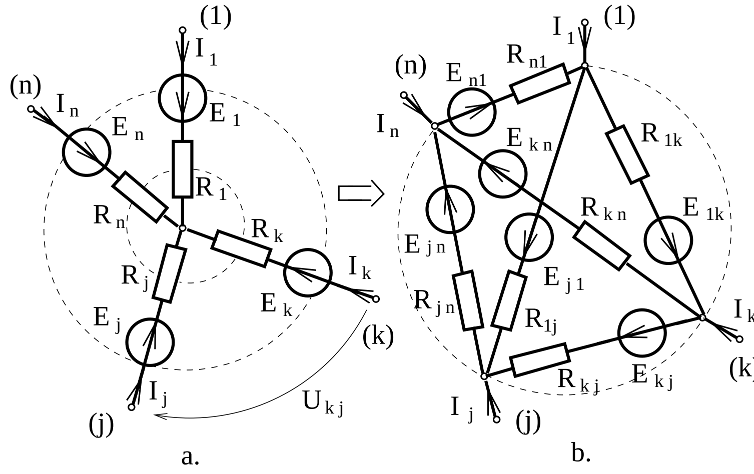


Fig. 2.8.

Relaţiile (2.20), (2.21) permit transfigurarea unei stele într-un poligon complet prin eliminarea nodului central. În cazul în care steaua este pasivă (nu conţine generatoare) atunci şi poligonul va fi pasiv şi va avea între nodurile k şi j un rezistor de conductanţă $G_{kj} = 1/R_{kj}$, a cărei valoare se calculează cu relaţia (2.20).

Valorile date de relaţia (2.21) pentru tensiunile electromotoare ale poligonului nu sunt singurele posibile, problema transfigurării din stea activă în poligon complet activ neavând soluţie unică.

În cazul particular n=3 transfigurarea stea-triunghi se face cu relaţiile:

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad E_{12} = E_1 - E_2; \\ G_{23} &= \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad E_{23} = E_2 - E_3; \\ G_{31} &= \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad E_{31} = E_3 - E_1; \end{aligned} \tag{2.22}$$

sau în funcţie de rezistenţe:

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_3};$$
$$R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_2}; \quad (2.23)$$
$$R_{31} = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}{R_1}.$$

Dacă rezistenţele din braţele stelei sunt egale atunci $R_\Delta = 3R_Y$.

Problema transfigurării stea-poligon complet are totdeauna soluţie pe când problema inversă a transfigurării poligon-stea are soluţie doar în cazul particular n=3.

Pentru transfigurarea triunghi-stea (fig. 2.9) se aplică relaţiile:

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad J_1 = J_{12} - J_{31};$$
$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad J_2 = J_{23} - J_{12}; \quad (2.24)$$
$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad J_3 = J_{31} - J_{23}.$$

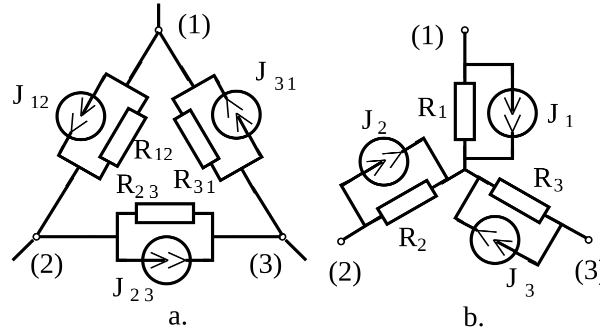


Fig. 2.9.

Faptul că orice stea poate fi transfigurată în poligon complet are importanţă deoarece în acest fel orice nod al unei reţele poate fi eliminat şi, prin transfigurări repetate, orice reţea electrică poate fi redusă, faţă de două borne, la un generator echivalent. Această metodă care permite calculul curentului ce străbate o latură a unui circuit prin reducerea restului circuitului la generatorul echivalent ce alimentează acea latură se numeşte **metoda generatoarelor echivalente**. Pentru calculul curenţilor şi tensiunilor din celelalte laturi ale circuitului se parcurge drumul invers, calculând din aproape în aproape tensiunile şi curenţii.

Metoda generatoarelor echivalente este eficientă, mai ales atunci când laturile sunt conectate serie, paralel şi interesează curentul printr-o singură latură.

Pentru exploatarea rezultatelor obţinute în acestă metodă sunt utilizate relaţiile prezentate în continuare.

Relaţia divizorului de tensiune permite calculul tensiunilor la bornele a două rezistoare R_1 şi R_2, conectate în serie, în funcţie de tensiunea totală aplicată (fig. 2.10a).

$$\boxed{\begin{aligned} U_1 &= U\frac{R_1}{R_1+R_2}; \\ U_2 &= U\frac{R_2}{R_1+R_2}. \end{aligned}} \tag{2.25}$$

Fig. 2.10.

Relaţia divizorului de curent permite calculul curenţilor ce străbat două rezistoare R_1 şi R_2, conectate în paralel, în funcţie de curentul total I (fig. 2.10.b).

$$\boxed{\begin{aligned} I_1 &= I\frac{R_2}{R_1+R_2}; \\ I_2 &= I\frac{R_1}{R_1+R_2}. \end{aligned}} \tag{2.26}$$

Observaţii asupra relaţiilor de echivalenţă:

Relaţiile de echivalenţă între reţelele electrice pot fi de mai multe feluri, între aceste relaţii putându-se stabili chiar o ordine, unele fiind mai fine, altele mai grosiere.

Relaţia de echivalenţă cea mai fină este exemplificată de circuitele din figura 2.11.a şi 2.11.b. Cele două circuite au aceeaşi matrice de apartenenţă a laturilor la noduri şi au aceleaşi elemente pe laturile corespondente. Cele două reţele nu pot fi deosebite una de cealaltă în teoria circuitelor, această relaţie de echivalenţă fiind o relaţie de identitate.

Circuitul reprezentat în figura 2.11.c se deosebeşte de cel din figura 2.11.a prin faptul că numerotarea laturilor este făcută în alt mod, fără ca sensurile de referinţă, conexiunea sau elementele din laturi să fie schimbate. Circuitul din figura 2.11.c este echivalent cu cel din figura 2.11.a, dar cu o relaţie de echivalenţă mai slabă decât identitatea definită anterior. În acest nou caz, două circuite se consideră echivalente dacă matricea de incidenţă a unuia se obţine din matricea de incidenţă a celuilalt prin permutarea coloanelor.

Un al treilea tip de echivalenţă, mai slab decât cele anterioare, este evidenţiat în circuitul din figura 2.11.d, care se deosebeşte de circuitul din figura 2.11.a prin ordinea adoptată la numerotarea laturilor, dar mai ales prin faptul că sensurile de referinţă ale laturilor nu coincid la laturile corespondente. În acest caz matricile de incidenţă pentru grafurile neorientate (obţinute prin eliminarea semnelor elementelor matricilor de incidenţă) sunt fie egale, fie se obţin una din alta prin permutările coloanelor.

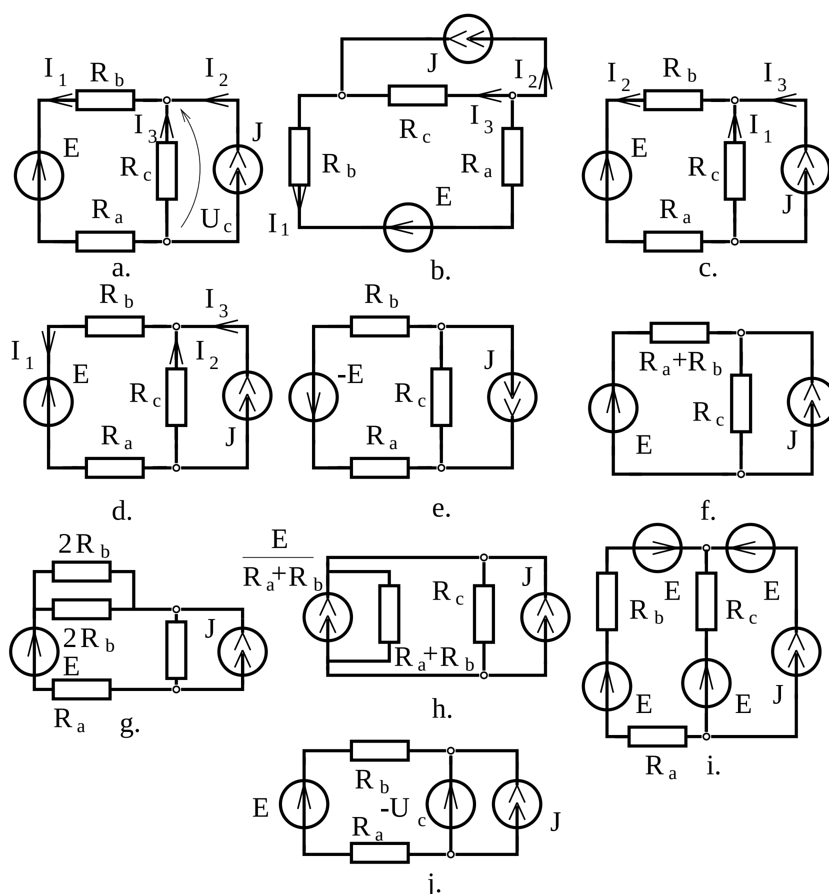


Fig. 2.11.

Din punctul de vedere al generatoarelor, se poate defini o nouă relaţie de

echivalenţă pornind de la observaţia că săgeata tensiunii electromotoare şi dubla săgeată a curentului electromotor îşi pot schimba sensurile, cu condiţia să se schimbe semnul parametrului E sau J iar curenţii şi tensiunile circuitului nu se modifică. Din acest punct de vedere circuitul din figura 2.11.a şi cel din figura 2.11.e sunt echivalente.

O altă relaţie de echivalenţă între circuite se poate obţine dacă se consideră că o clasă de echivalenţă conţine toate circuitele ce diferă unul de celălalt, doar printr-o subreţea (eventual dipolară), iar toate circuitele dintr-o clasă de echivalenţă au aceleaşi tensiuni şi aceiaşi curenţi în exteriorul subreţelei transfigurate.

Dacă o clasă de echivalenţă se desparte în subclase la care condiţia de echivalenţă este ca suma puterilor consumate de rezistoare să fie aceeaşi, atunci se obţine o relaţie de echivalenţă mai fină.

De exemplu, circuitele din figurile 2.11.a, f, g şi h sunt echivalente în sensul definit anterior, subreţeaua transfigurată fiind latura din stânga circuitului. Dacă în condiţia de echivalenţă se impune ca puterea consumată să nu se modifice, atunci circuitele a, f, g sunt echivalente, în schimb circuitul h face parte din altă clasă de echivalenţă.

Dintre echivalenţele pe la borne evidenţiate de teoremele prezentate anterior, numai echivalenţele definite de generatoarele de tensiune serie şi generatoarele de curent paralel satisfac condiţia că elementul echivalent disipă aceeaşi putere în rezistoare ca elementele iniţiale. Această condiţie nu este îndeplinită în cazul echivalenţei generator de tensiune - generator de curent, sau al echivalenţelor definite de generatoarele de tensiune paralel - generatoarele de curent serie.

Din aceeaşi categorie de relaţii de echivalenţă face parte şi echivalenţa indusă de teorema lui Vaschy (enunţată în paragraful 3.5). Circuitul din figura 2.11.i este echivalent cu circuitul din figura 2.11.a, nodul superior fiind echivalent cu steaua celor trei generatoare.

Un ultim fel de relaţie de echivalenţă este generat de teorema substituţiei (fig. 2.11.j). Spre deosebire de echivalenţele anterioare, cele generate de teorema substituţiei sunt mai slabe, deoarece curenţii din cele două circuite, iniţial echivalente, nu se mai păstrează egali dacă parametrul unui element de circuit se modifică simultan la cele două circuite (fig. 2.11.a, j).

PROBLEME

2.1.1. Să se determine generatorul real de tensiune echivalent generatorului din figura 2.1.1 şi să se reprezinte grafic ecuaţia sa de funcţionare.

2.1.2. Să se determine generatorul real de curent echivalent generatorului din figura 2.1.2 şi să se se reprezinte grafic ecuaţia sa de funcţionare.

2.1.3. Să se demonstreze că ecuaţia de funcţionare a elementului dipolar reprezentat în figura 2.1.3 nu depinde de poziţia comutatorului K.

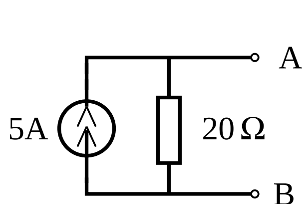


Fig. 2.1.1.

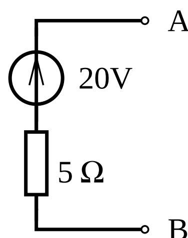


Fig. 2.1.2.

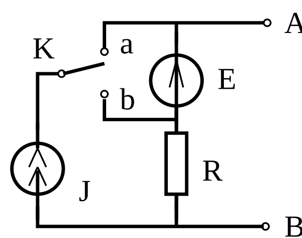


Fig. 2.1.3.

2.1.4. Să se determine generatoarele echivalente dipolului din figura 2.1.4.a, a cărui ecuaţie de funcţionare este reprezentată grafic în figurile 2.1.4.b-h.

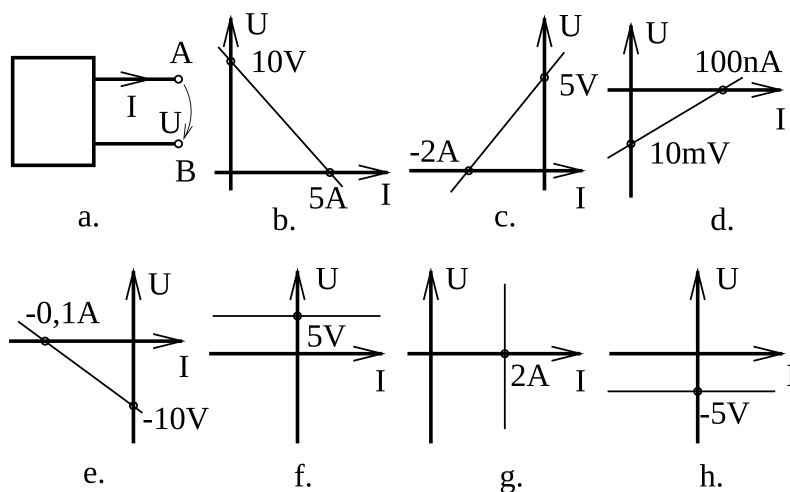


Fig. 2.1.4.

2.1.5. Să se determine generatoarele echivalente dipolului din figura 2.1.5 a cărui ecuaţie de funcţionare se consideră reprezentată grafic în figurile 2.1.4.b-h.

2.1.6. Să se demonstreze relaţiile (2.5) - (2.10).

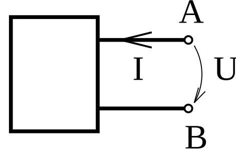


Fig. 2.1.5.

2.1.7. Să se demonstreze relaţiile (2.18) şi (2.19).

2.1.8. Să se demonstreze relaţiile (2.20) şi (2.21.

2.1.9. Să se demonstreze relaţiile (2.24).

2.1.10. Să se determine generatoarele reale de curent şi de tensiune echivalente elementelor dipolare reprezentate în figura 2.1.6.

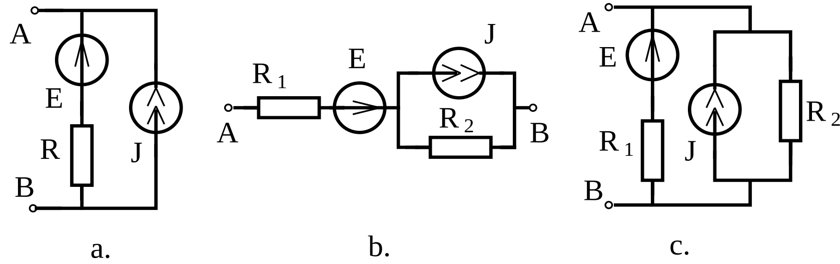


Fig. 2.1.6.

2.1.11. Se consideră pe rând toate combinaţiile de câte două elemente din lista prezentată în figura 2.1.7. Să se determine ecuaţia de funcţionare şi schema echivalentă a perechii de elemente considerate, conectate în serie.

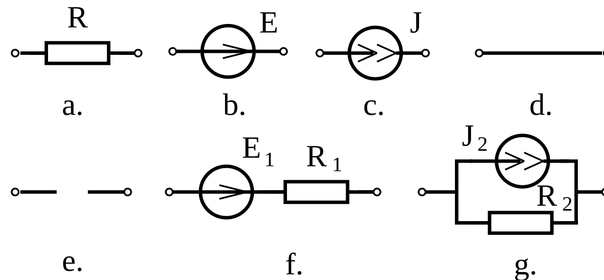


Fig. 2.1.7.

2.1.12. Să se rezolve problema 2.1.11 considerând elementele conectate în paralel.

2.1.13. Să se calculeze rezistenţa echivalentă între bornele A şi B pentru reţelele rezistive din figura 2.1.10.

2.1.14. Să se determine rezistenţele echivalente între perechile de borne A-B, B-C, A-C pentru circuitele reprezentate în figurile 2.1.8.a-f.

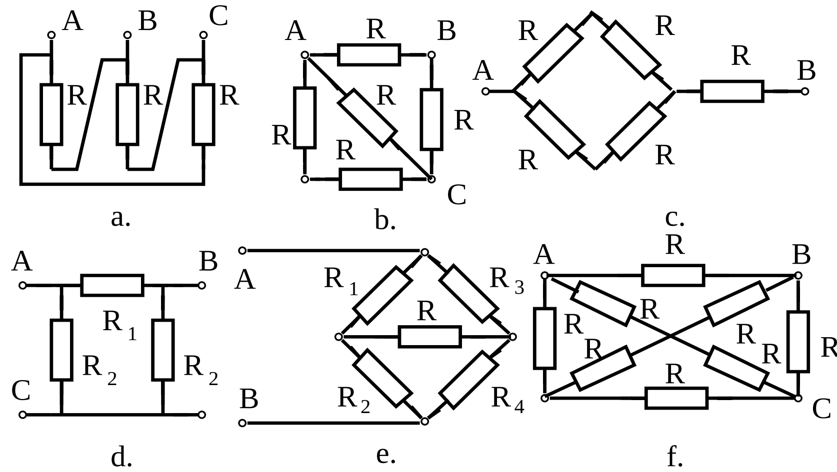


Fig. 2.1.8.

2.1.15. Să se calculeze rezistenţa R_{AB} pentru diferite poziţii ale comutatoarelor din circuitul reprezentat în figura 2.1.9.

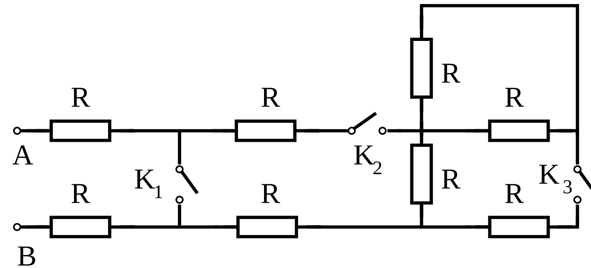


Fig. 2.1.9.

2.1.16. Să se determine generatoarele echivalente faţă de bornele A şi B ale reţelelor din figurile 2.1.11 şi 2.1.12.

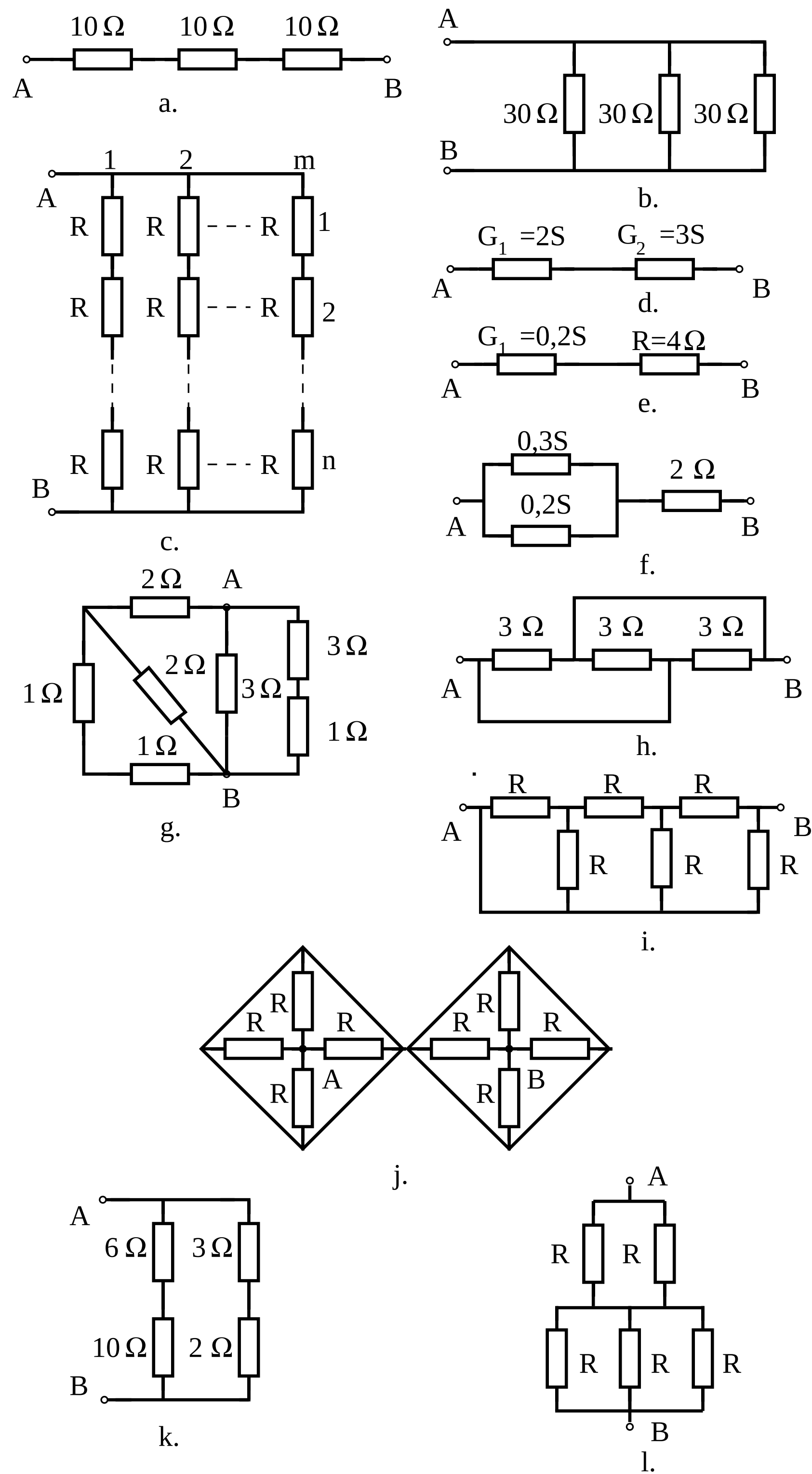
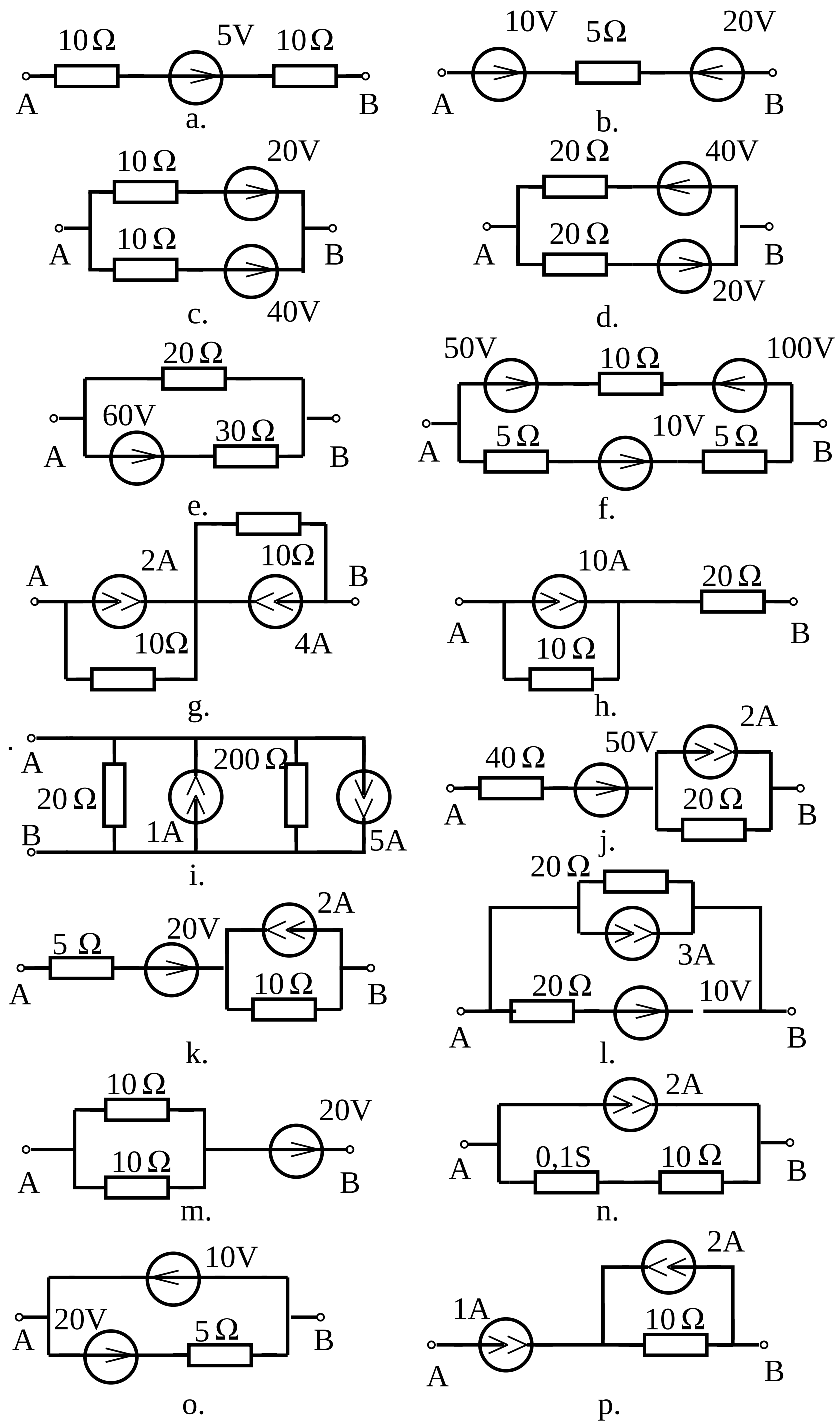

10 Ω
10 Ω
10 Ω
A
B
a.
A
B
30 Ω
30 Ω
30 Ω
b.
1
2
m
A
B
R
1
2
n
c.
G1 =2S
G2 =3S
A
B
d.
G1 =0,2S
R=4 Ω
A
B
e.
0,3S
0,2S
2 Ω
A
B
f.
2 Ω
A
3 Ω
2 Ω
3 Ω
1 Ω
1 Ω
1 Ω
B
g.
3 Ω
3 Ω
3 Ω
A
B
h.
R
A
B
i.
R
A
B
j.
A
6 Ω
3 Ω
10 Ω
2 Ω
B
k.
A
R
B
l.

Fig. 2.1.10.



10 Ω
5V
10 Ω
A
a.
B
10V
5Ω
20V
A
b.
B
10 Ω
20V
10 Ω
A
B
c.
40V
20 Ω
40V
20 Ω
A
B
20V
d.
20 Ω
60V
30 Ω
A
B
e.
50V
10 Ω
100V
5 Ω
10V
5 Ω
A
B
f.
A
2A
10Ω
B
10Ω
4A
g.
10A
20 Ω
A
10 Ω
B
h.
A
200 Ω
20 Ω
B
1A
5A
i.
2A
40 Ω
50V
20 Ω
A
B
j.
20 Ω
2A
20V
5 Ω
10 Ω
A
B
k.
3A
20 Ω
10V
A
B
l.
10 Ω
20V
10 Ω
A
B
m.
2A
0,1S
10 Ω
A
B
n.
10V
20V
5 Ω
A
B
o.
2A
1A
10 Ω
A
B
p.

Fig. 2.1.11.

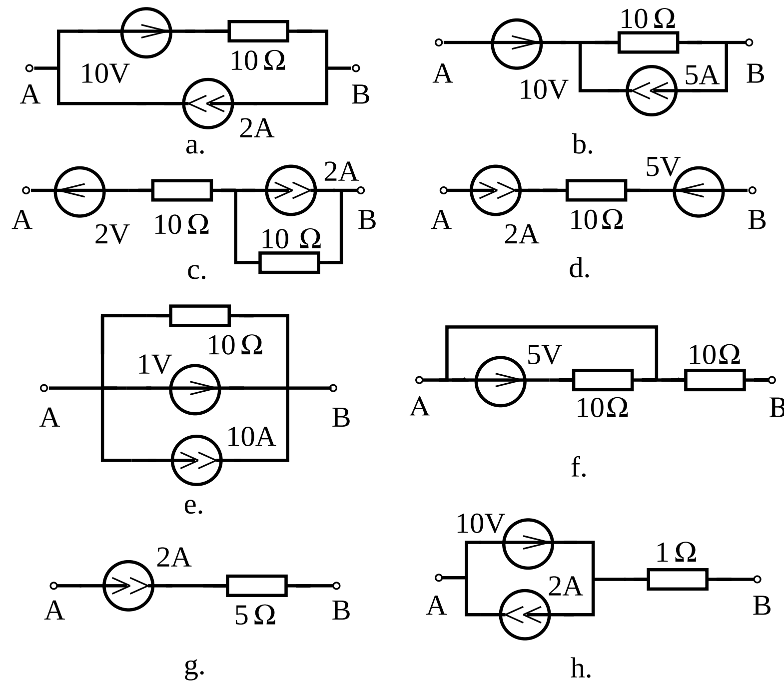


Fig. 2.1.12.

2.1.17. Să se calculeze rezistenţele echivalente între bornele A şi B pentru circuitele infinite din figura 2.1.13.

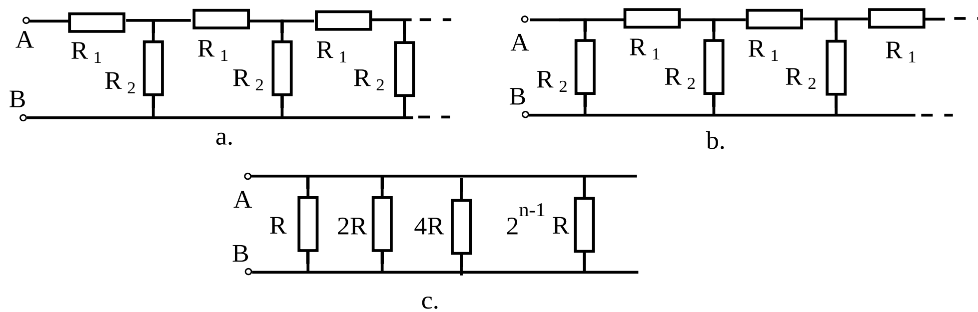


Fig. 2.1.13.

2.1.18. Să se determine generatoarele echivalente de curent faţă de perechile de borne A-B, B-C, A-C pentru circuitele din figura 2.1.14.

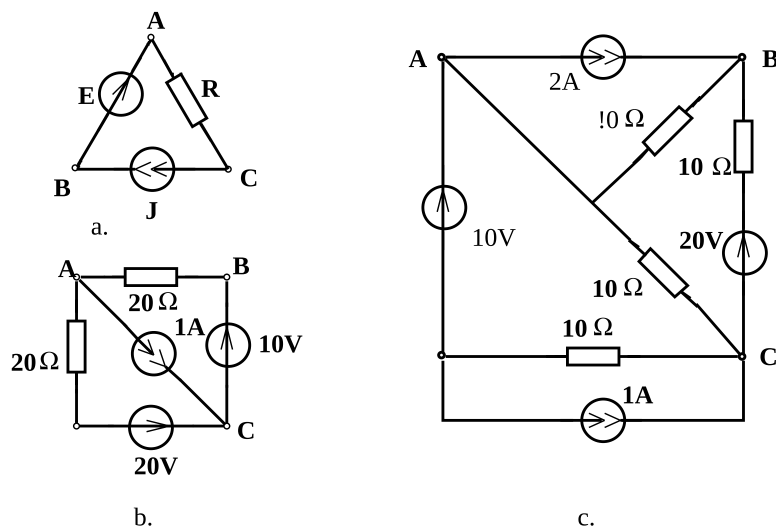


Fig. 2.1.14.

2.1.19. Să se determine generatoarele echivalente de tensiune faţă de perechile de borne A-B, B-C, A-C pentru circuitele din figura 2.1.14.

2.1.20. Să se calculeze rezistenţa echivalentă între bornele A şi B aplicând configurarea stea-poligon în circuitele din figurile 2.1.15.a-c.

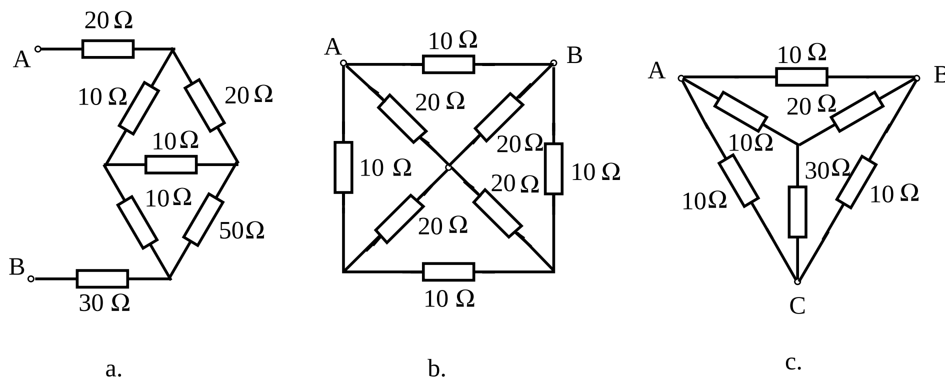


Fig. 2.1.15.

2.1.21. Să se determine generatorul echivalent între bornele A şi B aplicând

transfigurarea stea-poligon în circuitele din figurile 2.1.16.a-c.

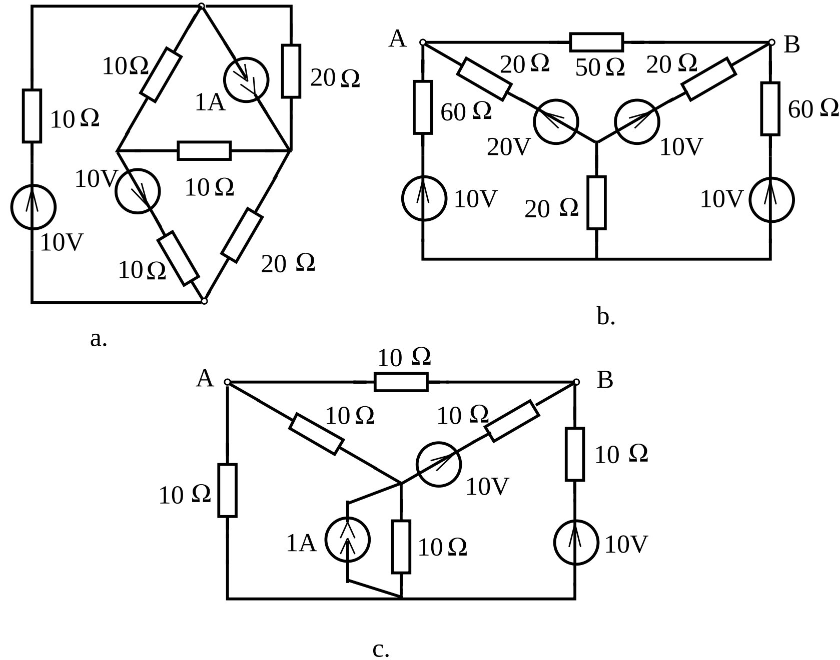


Fig. 2.1.16.

2.1.22. Să se transfigureze circuitele triunghi reprezentate în figura 2.1.17 în circuite stea.

2.1.23. Să se determine generatoarele echivalente de curent şi tensiune faţă de bornele A şi B pentru circuitele din figura 2.1.18.

2.1.24. Să se determine intensităţile curenţilor şi tensiunile la circuitele din figura 2.1.19, prin calculul rezistenţei echivalente la bornele generatorului şi apoi cu ajutorul relaţiilor divizorului de curent şi de tensiune.

2.1.25. Fie grafurile prezentate în figura 2.1.20. Să se prezinte lista transfigurărilor serie, paralel sau stea-poligon ce trebuie efectuate pentru a reduce graful la o latură între două noduri. Se vor considera pe rând diferite perechi de noduri.

2.1.26. Aplicând metoda generatoarelor echivalente, să se calculeze intensitatea curentului I pentru circuitele din figura 2.1.21. Pornind de la curentul I să se determine apoi ceilalţi curenţi.

2.1.27. Fie două rezistoare având rezistenţele R_1 şi R_2 conectate în serie. Să se calculeze şi să se reprezinte grafic eroarea relativa $\varepsilon_r(R_1) = (R_a - R_e)/R_e$ ce se

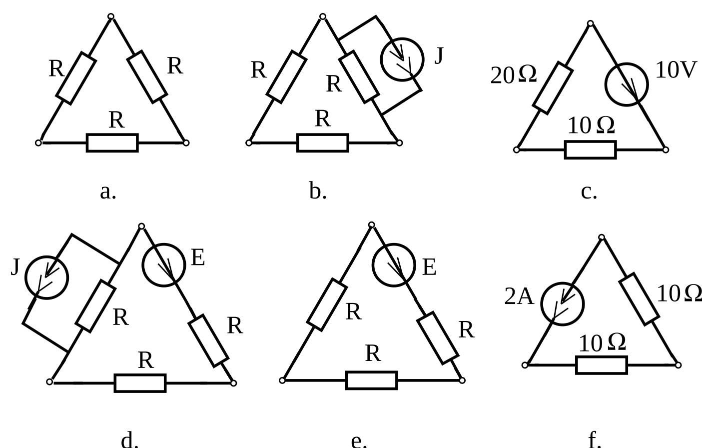


Fig. 2.1.17.

face asupra rezistenţei echivalente R_e atunci când se presupune în circuit numai rezistenţa R_a=R_2.

2.1.28. Fie două rezistoare având rezistenţele R_1 şi R_2, conectate în paralel. Să se calculeze şi să se reprezinte grafic eroarea relativă $\varepsilon_r(R_1) = (R_a - R_e)/R_e$ ce se face asupra rezistenţei echivalente R_e atunci când se presupune în circuit numai rezistenţa R_a=R_2.

2.1.29. Ţinând seama de soluţia problemelor 2.1.27 şi 2.1.28, să se calculeze valoarea aproximativă a rezistenţei echivalente între bornele A şi B în circuitele din figura 2.1.22.

2.1.30. Fie un generator real de tensiune cu parametrii (E,r) la bornele căruia este conectată o rezistenţă de sarcină R. Să se calculeze eroarea relativă ce se face asupra curentului de sarcină $\varepsilon_I = (I - I_a)/I$ şi asupra tensiunii $\varepsilon_U = (U - U_a)/U$ şi să se reprezinte grafic aceste erori în funcţie de rezistenţa R, atunci când se înlocuieşte generatorul real cu un generator ideal cu tensiune electromotoare E (se neglijează rezistenţa internă r ca în figura 2.1.23.b).

2.1.31. Fie un generator real de curent cu parametrii (J,r), la bornele căruia este conectată o rezistenţă de sarcină R. Să se calculeze eroarea relativă ce se face asupra curentului de sarcină $\varepsilon_I = (I - I_a)/I$ şi asupra tensiunii $\varepsilon_U = (U - U_a)/U$ şi să se reprezinte grafic aceste erori în funcţie de conductanţa de sarcină G=1/R, atunci când se înlocuieşte generatorul real de curent cu un generator ideal de curent (se neglijază conductanţa internă ca în figura 2.1.24.b).

2.1.32. Fie un generator real având tensiunea de mers în gol U_0=10V şi curentul de scurtcircuit I_0=10mA. Să se determine valorile rezistenţelor de sarcină

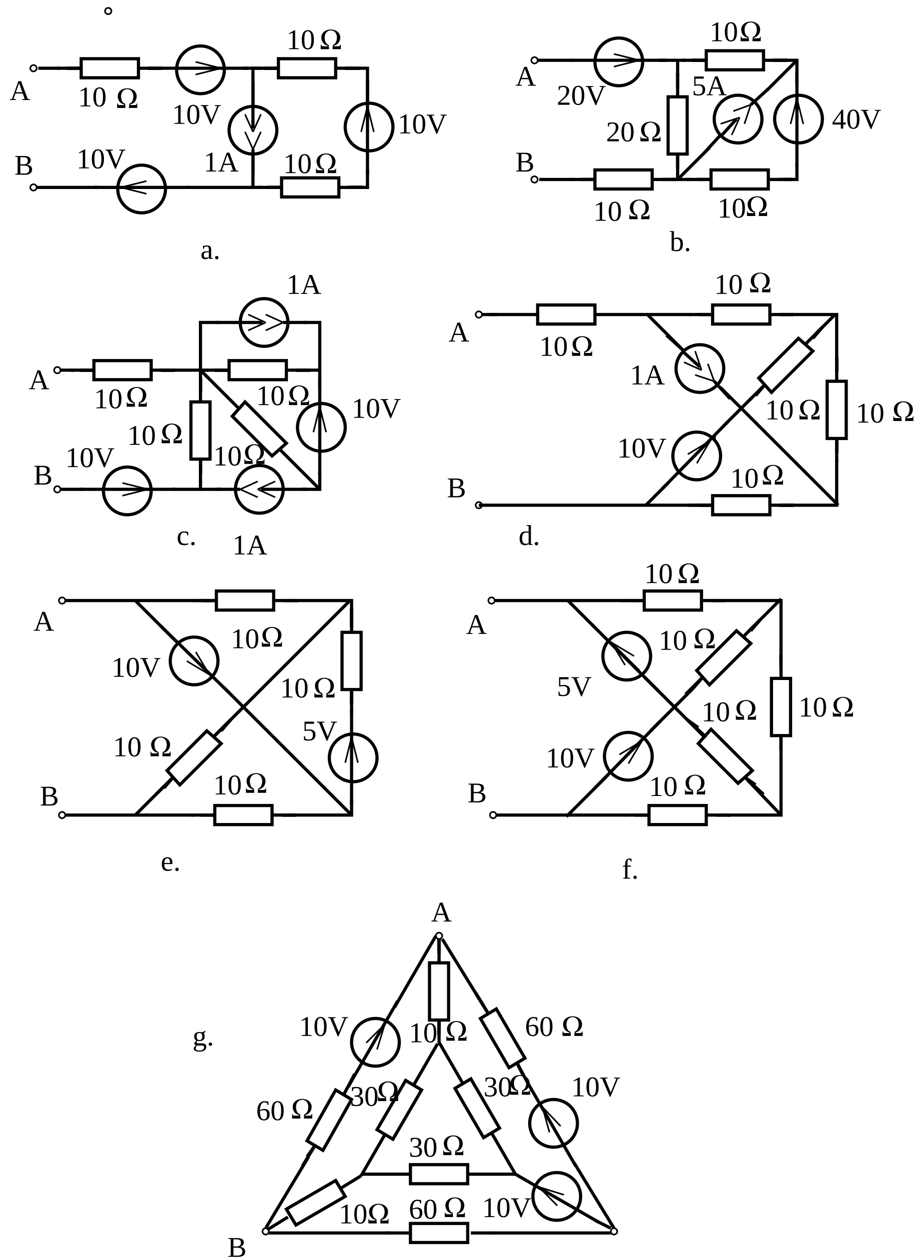

A
B
10 Ω
10V
10Ω
10V
1A
10V
10Ω
a.
A
20V
10Ω
5A
20 Ω
40V
B
10 Ω
10Ω
b.
1A
A
10Ω
10Ω
10V
10Ω
10V
10Ω
B
c.
1A
A
10Ω
10 Ω
1A
10Ω
10 Ω
10V
10Ω
B
d.
A
10V
10Ω
10Ω
10 Ω
5V
10Ω
B
e.
A
10Ω
10 Ω
5V
10Ω
10Ω
10V
10 Ω
B
f.
A
g.
10V
10 Ω
60 Ω
60 Ω
30Ω
30Ω
10V
30 Ω
10Ω
60 Ω
10V
B

Fig. 2.1.18.

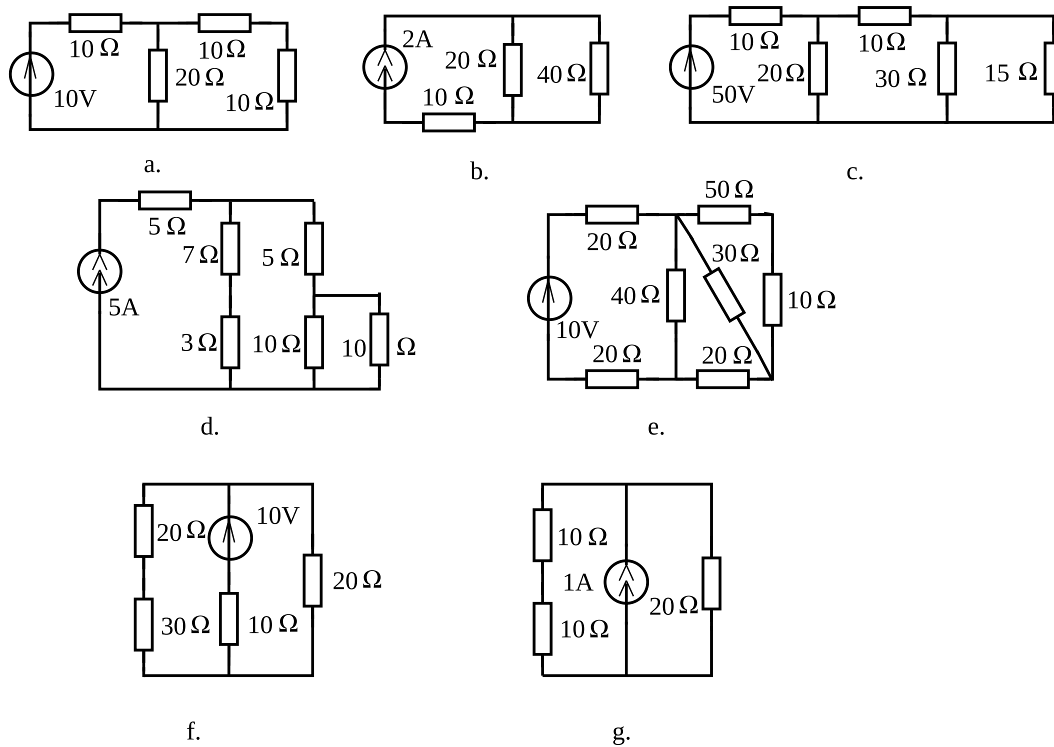


Fig. 2.1.19.

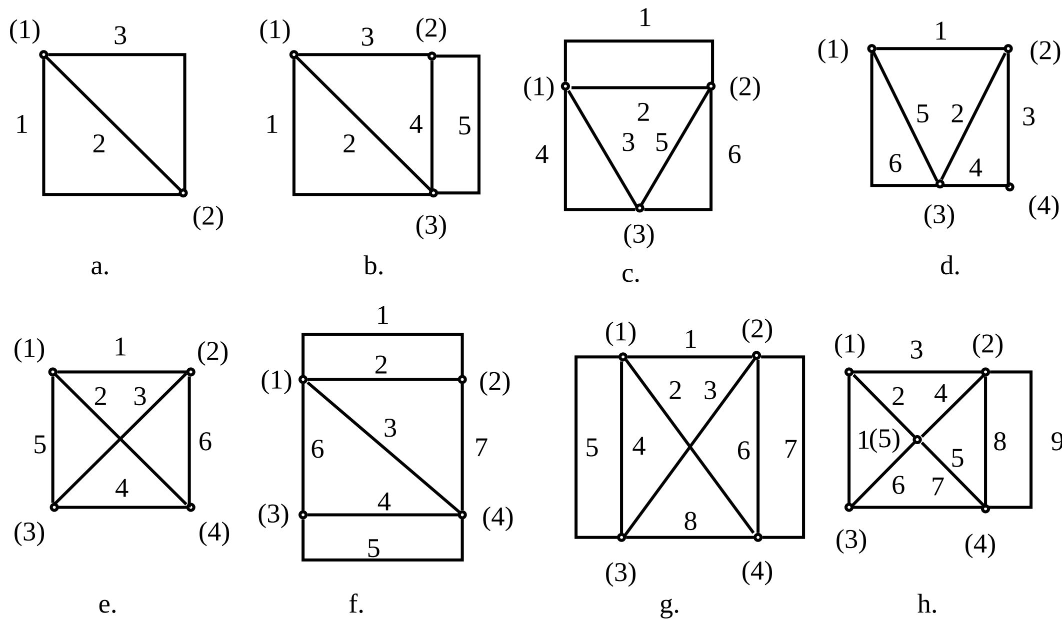


Fig. 2.1.20.

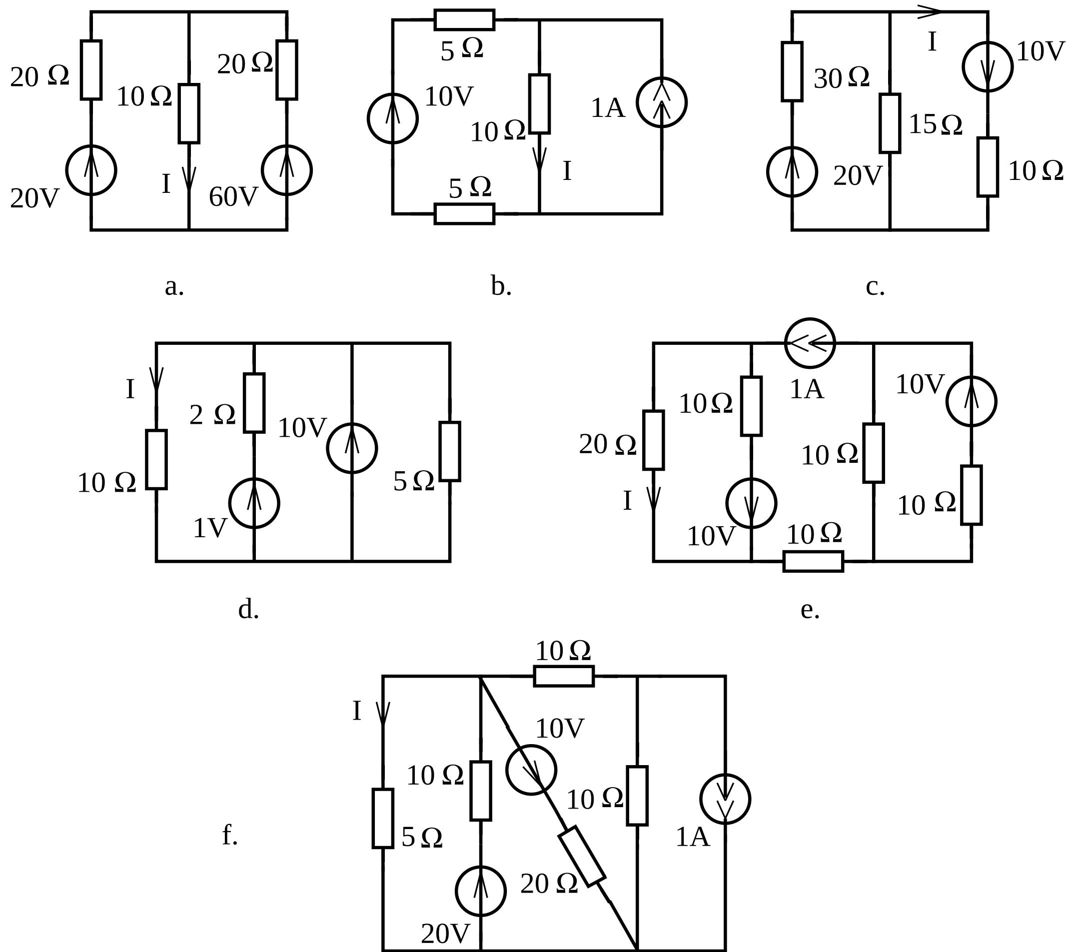


Fig. 2.1.21.

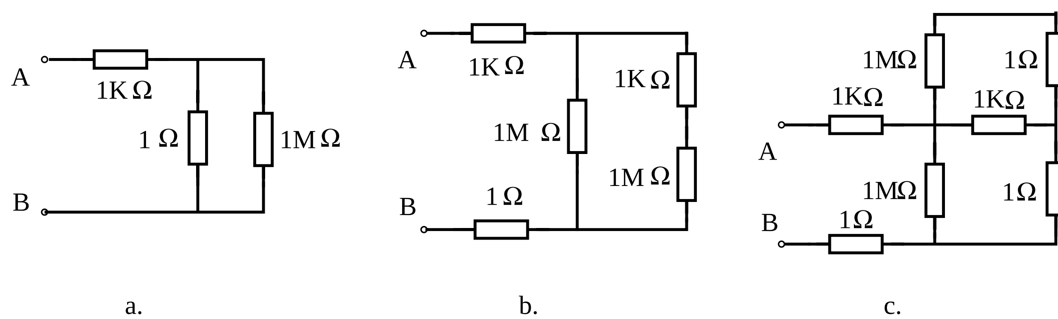


Fig. 2.1.22.

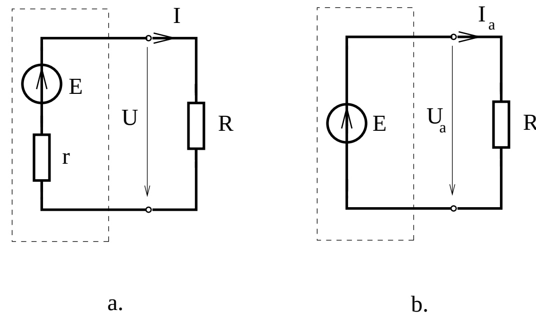


Fig. 2.1.23.

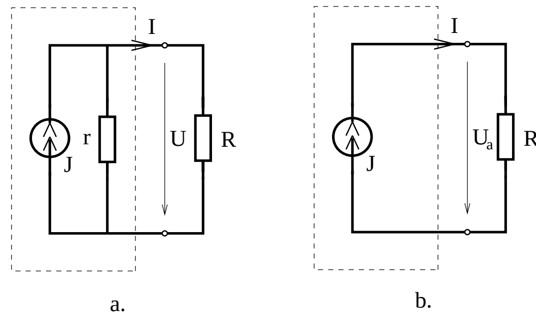


Fig. 2.1.24.

R ce pot fi conectate la bornele acestui generator pentru ca eroarea de aproximare între acest dipol şi un generator ideal de tensiune să fie mai mică decât 1%.

2.1.33. În ce condiţii referitoare la rezistenţa R generatorul din problema 2.1.32 poate fi aproximat cu un generator ideal de curent, astfel încât eroarea relativă să fie mai mică decât 1% ?

2.1.34. Să se determine relaţiile aproximative ale divizorului de tensiune şi de curent aplicabile în cazul în care cele două rezistenţe satisfac inegalitatea $R_1 \ll R_2$. Care este eroarea de calcul ce apare atunci când se operează cu aceste relaţii ?

2.1.35. Să se determine generatoarele ideale ce pot aproxima funcţionarea generatoarelor reale din figura 2.1.25.

2.1.36. Să se calculeze valorile aproximative ale curenţilor şi tensiunilor din circuitele reprezentate în figura 2.1.26.

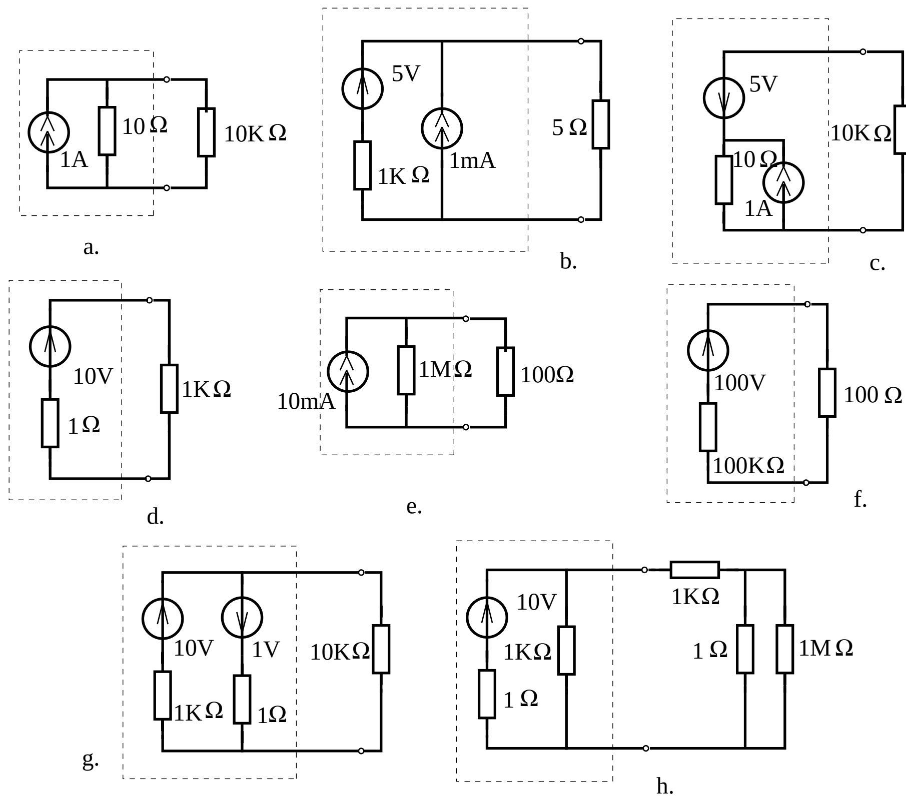


Fig. 2.1.25.

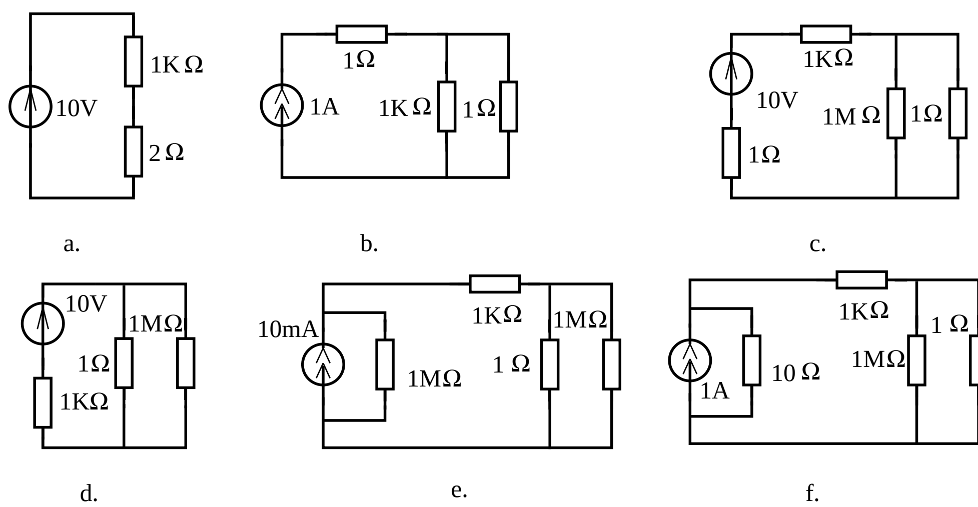


Fig. 2.1.26.

2.2 Metoda ecuaţiilor lui Kirchhoff

BREVIAR

Problema fundamentală a analizei unui circuit electric rezistiv constă în determinarea intensităţii curenţilor I_k, pentru k=1,...,L şi a tensiunilor U_k, pentru k=1,...,L în toate laturile, considerând cunoscută topologia circuitului (schema electrică) şi parametrii elementelor R_k, E_k, J_k, pentru k=1,...,L.

Pentru determinarea **parametrilor topologici** L şi N este necesară definirea conceptului de latură şi a celui de nod. Într-o primă accepţiune se va înţelege prin *latură* un element ideal de circuit, iar prin nod se înţelege o bornă la care concură cel puţin două laturi. În această accepţiune pentru circuitul din figura 2.11.a parametrii topologici sunt $L_0 = 5, N_0 = 4$.

O altă accepţiune este aceea în care *latura* este considerată ca o mulţime de elemente ideale conectate în serie, iar prin *nod* se înţelege o bornă la care concură **cel puţin trei laturi**. În această accepţiune, circuitul din figura 2.11.a are $L_1 = 3$ laturi şi $N_1 = 2$ noduri.

Un alt mod în care este posibilă definirea acestor concepte constă în acceptarea ca latură, fie a generatorului real de tensiune (fig. 2.12.a), care poate degenera în generator ideal de tensiune atunci când $R = 0$ sau în rezistor când $E = 0$, fie latura de tip generator real de curent (fig. 2.12.b), care poate degenera în generator ideal de curent atunci când $G = 0$. În această accepţiune circuitul din figura 2.11.a are $L_2 = 3$ laturi şi $N_2 = 3$ noduri. O modalitate eficientă de definire a laturii standard este cea din figura 2.12.c, în care rezistorul este caracterizat prin rezistenţa R sau conductanţa G.

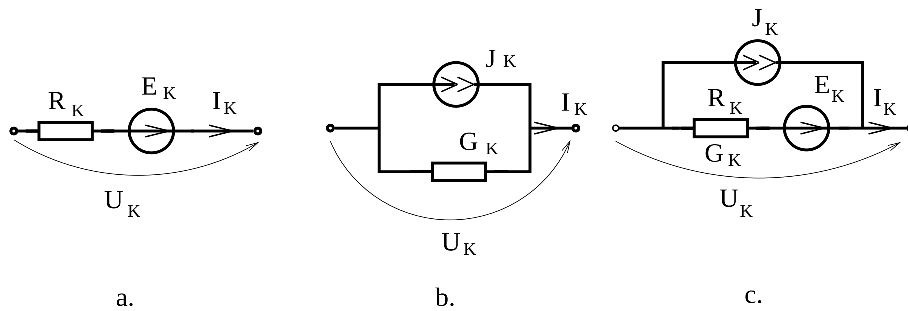


Fig. 2.12.

Se constată că parametrii topologici L şi N ai unui circuit depind de tipul laturii standard adoptate în definirea conceptului de latură. Pentru analiza reţelelor rezistive liniare cu metoda generală a ecuaţiilor lui Kirchhoff se rezolvă un sistem format din 2L ecuaţii algebrice liniare, a cărui soluţie reprezintă curenţii I_k şi tensiunile U_k din laturile reţelei. Acest sistem este alcătuit din $(N-1)$ ecuaţii

independente ce reprezintă prima teoremă a lui Kirchhoff, $(L - N + 1)$ ecuaţii independente ce reprezintă a doua teoremă a lui Kirchhoff:

$$\sum_{k\in(n)}^{alg} I_k = 0, \qquad n = 1, 2, ..., (N - 1); \tag{2.27}$$

$$\sum_{k\in[b]}^{alg} U_k = 0, \qquad b = 1, 2, ..., (L - N + 1); \tag{2.28}$$

iar restul de L ecuaţii reprezintă ecuaţiile de funcţionare ale laturilor reţelei, respectiv pentru laturile de tip generator real de tensiune (fig. 2.12.a):

$$U_k = R_k I_k - E_k; \tag{2.29}$$

iar pentru laturile de tip generator real de curent (fig. 2.12.b):

$$I_k = J_k + G_k U_k. \tag{2.30}$$

Sub formă matriceală, ecuaţiile (2.27)-(2.30) devin:

$$\begin{aligned} Ai &= 0; \\ Bu &= 0; \\ \alpha i + \beta u &= \gamma, \end{aligned} \tag{2.31}$$

în care A este matricea redusă de apartenenţă a laturilor la noduri, B este matricea de apartenenţă a laturilor la buclele fundamentale, i este vectorul coloană al curenţilor, u este vectorul coloană al tensiunilor, iar α, β şi γ sunt matrici ce conţin parametrii elementelor de circuit.

Datorită dimensiunii mari a sistemului de ecuaţii de mai sus, şi anume $2L$ ecuaţii cu tot atâtea necunoscute, această metodă nu este utilizată în calculul manual. Pentru micşorarea dimensiunii sistemului se utilizează următoarele două variante ale metodei ecuaţiilor lui Kirchhoff: analiza reţelelor în raport cu curenţii şi analiza în raport cu tensiunile.

Analiza reţelelor în raport cu intensităţile curenţilor se face eliminând tensiunile din sistemul (2.27)-(2.29):

$$\boxed{\sum_{k\in(n)}^{alg} I_k = 0;} \tag{2.32}$$

$$\boxed{\sum_{k\in[b]}^{alg} R_k I_k + \sum_{k\in[b]}^{alg} U_k = \sum_{k\in[b]}^{alg} E_k,} \tag{2.33}$$

unde: n=1, 2, ..., (N-1) şi b=1, 2, ..., (L-N+1). Sistemul obţinut are L ecuaţii cu L necunoscute şi anume curenţii din laturi $I_1, I_2, ..., I_L$, cu excepţia curenţilor

din generatoarele ideale de curent prin care curenţii sunt cunoscuţi $I_k = \pm J_k$ dar tensiunile U_k la borne sunt necunoscute. Ecuaţia (2.33) poartă numele de **a doua teoremă a lui Kirchhoff sub formă particulară**. Cele trei sume ce intervin în relaţia (2.33) sunt algebrice, în sensul că termenii respectivi se adaugă cu plus dacă sensurile de referinţă ale curentului I_k, ale tensiunii la bornele generatoarelor de curent U_k, respectiv ale tensiunii electromotoare E_k ale generatoarelor ideale de tensiune coincid cu sensul de parcurs al ochiului (I_1, I_4, U_2 şi E_3 în figura 2.13) şi se adaugă cu minus în caz contrar (I_3, U_5 şi E_4 în figura 2.13).

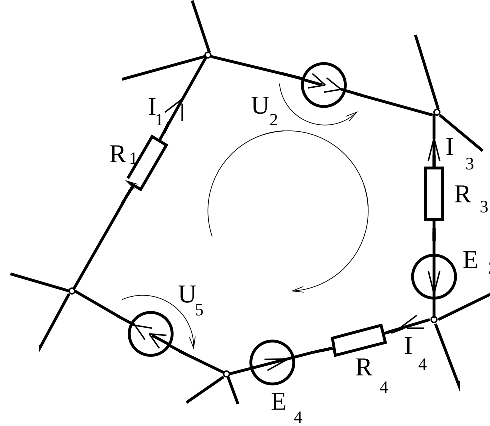


Fig. 2.13.

Pentru scrierea sub formă matriceală a ecuaţiilor referitoare la curenţi, se consideră că reţeaua conţine N_{GC} generatoare de curent. Dacă laturile se numerotează astfel încât generatoarele de curent să fie situate pe ultimele laturi, atunci ecuaţiile (2.31) se pot scrie sub forma:

$$Ai = \left[A_1 \vdots A_2\right] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = 0; \tag{2.34}$$

$$Bi = \left[B_1 \vdots B_2\right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 0, \tag{2.35}$$

în care vectorul coloană al curenţilor $i = [I_1, I_2, ..., I_L]^T$ şi vectorul coloană al tensiunilor $u = [U_1, U_2, ..., U_L]^T$ sunt partiţionaţi în componentele vectoriale i_1 şi u_1 corespunzătoare laturilor ce nu conţin generatoare de curent şi respectiv i_2 şi u_2 corespunzătoare celor N_{GC} generatoare ideale de curent. Dacă vectorul curenţilor electromotori este j atunci:

$$i_2 = j = \begin{pmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_{N_{GC}} \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Ecuaţiile de funcţionare ale laturilor ce nu conţin generatoare de curent sunt:

$$u_1 = Ri_1 - e, \tag{2.37}$$

în care R este matricea diagonală a rezistenţelor laturilor şi e este vectorul coloană al tensiunilor electromotoare de tensiune. Înlocuind (2.36) în (2.34) şi (2.37) în (2.35) rezultă urmatoarea **formă matriceală a ecuaţiilor**:

$$A_1 i_1 = -A_2 j B_1 R i_1 + B_2 u_2 = B_1 e, \tag{2.38}$$

sau sub forma bloc:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 R & B_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_2 j \\ B_1 e \end{bmatrix}. \tag{2.39}$$

Dacă circuitul nu conţine generatoare de curent sau dacă este posibilă transformarea acestora în generatoare de tensiune atunci $N_{GC} = 0$, iar ecuaţiile (2.38) devin:

$$\begin{cases} Ai = 0 \\ BRi = Be, \end{cases} \tag{2.40}$$

sau sub formă bloc matriceală:

$$\begin{bmatrix} A \\ BR \end{bmatrix} \cdot i = \begin{bmatrix} 0 \\ Be \end{bmatrix}. \tag{2.41}$$

Pentru analiza manuală a unui circuit electric rezistiv liniar compatibil, cu ajutorul metodei teoremelor lui Kirchhoff în raport cu curenţii, trebuie parcurse următoarele **etape ale algoritmului metodei**:

1. *Se determină parametrii topologici:* numărul de noduri N, numărul de laturi L şi numărul de bucle fundamentale $O = L - N + 1$; în acest sens este utilă trasarea grafului G al reţelei, ţinând seama de faptul că elementele conectate în serie pot fi considerate ca aparţinând aceleiaşi laturi;

2. *Se aleg sensurile de referinţă* şi se notează intensităţile *curenţilor* $I_1, I_2, ..$ $., I_L$ *şi tensiunile la bornele generatoarelor de curent* $U_1, U_2, ..., U_{N_{GC}}$;

3. *Se scrie prima ecuaţie a lui Kirchhoff* (2.32) în toate nodurile cu excepţia unuia arbitrar;

4. *Se aleg sensurile de parcurs* pentru O=L-N+1 bucle independente. Buclele independente pot fi "ochiurile" (similar ochiurilor unei plase, in cazul reţelelorplane), în cazul reţelelor plane, sau buclele fundamentale generate de coardele unui coarbore. În acest ultim caz arborele se va alege astfel încât să conţină toate laturile generatoare ideale de tensiune şi să nu conţină generatoare de curent. Este necesar ca sistemul de bucle să conţină

toate laturile reţelei (conform condiţiei de independenţă) şi este preferabil ca fiecare buclă să conţină cât mai puţine rezistoare (pentru simplificarea rezolvării sistemului);

5. *Se scrie a doua ecuaţie a lui Kirchhoff* sub formă particulară (2.33) parcurgând fiecare buclă de două ori, la prima trecere urmărind rezistoarele şi generatoarele de curent, iar la a doua trecere urmărind generatoarele ideale de tensiune. La ambele treceri căderile de tensiune pe rezistoare $R_k I_k$, tensiunile U_k la bornele generatoarelor de curent şi tensiunile electromotoare E_k se adaugă cu plus sau minus după cum sensurile mărimilor I_k, U_k şi E_k coincid sau nu cu sensul de parcurs al buclei;

6. *Se rezolvă sistemul* format din cele L ecuaţii algebrice liniare determinându-se necunoscutele şi anume curenţii din laturi $I_1, I_2, ..., I_L$ şi tensiunile $U_1, U_2,$
...,$U_{N_{GC}}$ la bornele generatoarelor de curent. În rezolvarea sistemului se va ţine seama că intensităţile curenţilor din generatoarele de curent sunt date de curenţii electromotori ai acestor generatoare $I_k = \pm J_k$;

7. *Se aleg sensurile de referinţă*, se notează şi se calculează *tensiunile la bornele* elementelor, în funcţie de curenţi, aplicând ecuaţiile de funcţionare ale elementelor respective;

8. Pentru *verificarea soluţiei* obţinute se pot aplica următoarele metode:

- se verifică prima teoremă a lui Kirchhoff în ultimul nod sau pe o secţiune;
- se verifică a doua teoremă a lui Kirchhoff pe o buclă pe care ea nu a fost scrisă;
- se verifică bilanţul puterilor:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{L} R_k I_k^2 = \sum_{k=1}^{L} E_k I_k + \sum_{k=1}^{N_{GC}} U_k J_k.} \tag{2.42}$$

În ecuaţia (2.42) suma din membrul stâng este aritmetică în timp ce sumele din membrul drept sunt algebrice, în sensul că termenii se adaugă cu semnul plus dacă satisfac regulile de asociere ale sensurilor din figura 2.14.a şi se adaugă cu semn minus dacă sensurile de referinţă sunt ca în figura 2.14.b.

Tehnici pentru **reducerea efortului de calcul** în metoda ecuaţiilor lui Kirchhoff:

1. Rezistoarele conectate în serie sau paralel pot fi echivalate de la început cu un singur rezistor, urmând ca în final să se aplice relaţiile divizorului de tensiune sau respectiv de curent pentru determinarea tensiunilor şi curenţilor;

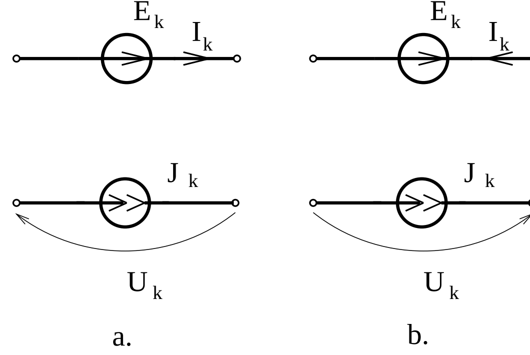


Fig. 2.14.

2. Generatoarele reale de curent vor fi înlocuite cu generatoarele echivalente de tensiune micşorând în acest fel numărul de laturi, deci şi dimensiunea sistemului;

3. Laturile active conectate în serie sau chiar în paralel pot fi înlocuite cu un generator real de tensiune echivalent;

4. O variantă a metodei, ce reduce foarte mult efortul de calcul, se bazează pe observaţia că dacă în etapa **2** a algoritmului se notează cu $I_1, I_2, ..., I_0$ curenţii din coarde iar curenţii din arbore se notează direct pe figură, ca sume algebrice de curenţi de coardă, atunci etapa **3** este inutilă, iar sistemul de ecuaţii conţine (L-N+1) necunoscute, în loc de L necunoscute. Alegerea arborelui se face astfel încât să conţină toate laturile generatoare ideale de tensiune şi să nu conţină generatoare de curent.

Analiza reţelelor în raport cu tensiunile se face eliminând intensităţile din sistemul (2.27)-(2.30), obţinându-se un sistem cu L ecuaţii şi anume:

$$\boxed{\sum_{k\in(n)}^{alg} G_k U_k + \sum_{k\in(n)}^{alg} I_k + \sum_{k\in(n)}^{alg} J_k = 0)} \tag{2.43}$$

$$\boxed{\sum_{k\in[b]}^{alg} U_k = 0} \tag{2.44}$$

cu n=1, 2,...,(N-1) şi b=1, 2,...,(L-N+1).

Ecuaţia (2.43) este cunoscută sub numele de **prima teoremă a lui Kirchhoff sub formă particulară**.

Necunoscutele sistemului (2.43)-(2.44) sunt în număr de L. Acestea sunt tensiunile la bornele laturilor cu excepţia laturilor generatoare ideale de tensiune, la care tensiunea este cunoscută $U_k = \pm E_k$, în schimb curentul I_k este necunoscut.

Ecuaţia (2.43) poartă numele de **prima teoremă a lui Kirchhoff sub formă particulară**, iar sumele ce intervin în ea sunt algebrice, adăugându-se cu plus termenii $G_k U_k, I_k, J_k$ dacă sensurile de referinţă ale mărimilor U_k, I_k şi J_k intră în nod (ca de exemplu, U_5, I_4, J_5, în figura 2.15) şi cu minus în caz contrar.

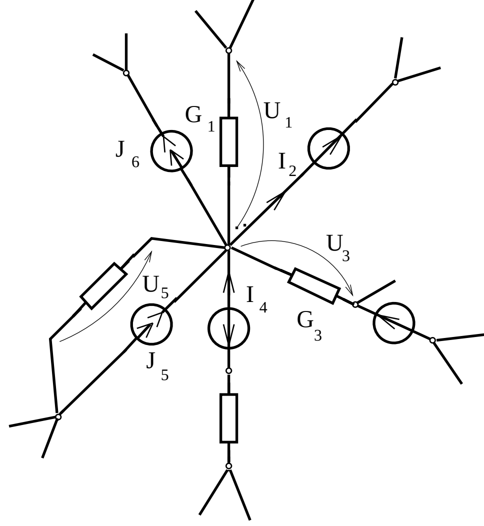


Fig. 2.15.

În aplicarea acestei metode, generatorul real de tensiune se consideră alcătuit din două laturi conectate în serie, o latură rezistor şi o latură generator ideal de tensiune. Pentru a evita introducerea unui nod suplimentar între rezistor şi generatorul ideal de tensiune este preferabil, în acest caz, să se înlocuiască toate generatoarele reale de tensiune prin generatoare reale de curent echivalente. Dacă circuitul conţine N_{GT} generatoare de tensiune şi laturile se numerotează astfel încât aceste generatoare sunt plasate în ultimele laturi, atunci matricele de incidenţă se partiţionează:

$$A = \left[A_1 \vdots A_2\right]; \; B = \left[B_1 \vdots B_2\right], \tag{2.45}$$

iar vectorii curenţilor şi tensiunilor vor fi:

$$i = \left[I_1, I_2, ..., I_L\right]^T = \left[i_1 \vdots i_2\right]^T;$$

$$u = \left[U_1, U_2, ..., U_L\right]^T = \left[u_1 \vdots u_2\right]^T;$$

$$u_2 = -\left[E_1, E_2, ..., E_{N_{GT}}\right]^T = -e.$$

Cu aceste notaţii **forma matriceală a ecuaţiilor** este:

$$\begin{aligned} B_1 u_1 &= B_L e; \\ A_1 G u_1 + A_2 i_2 &= -A_1 j, \end{aligned} \tag{2.46}$$

în care G este matricea diagonală a conductanţelor laturilor şi j este vectorul coloană al curenţilor electromotori. Forma bloc-matriceală a ecuaţiilor (2.46) este :

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ A_1 G & A_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_2 e \\ -A_1 j \end{bmatrix}. \tag{2.47}$$

Dacă circuitul nu conţine generatoare de tensiune, $N_{GT} = 0$, atunci ecuaţiile (2.46) devin:

$$\begin{aligned} Bu &= 0; \\ AGu &= -Aj, \end{aligned} \tag{2.48}$$

sau sub formă bloc matriceală:

$$\begin{bmatrix} B \\ AG \end{bmatrix} \cdot u = \begin{bmatrix} 0 \\ -Aj \end{bmatrix}. \tag{2.49}$$

Pentru analiza manuală a unui circuit electric rezistiv liniar se parcurg următoarele etape ale **algoritmului metodei teoremelor lui Kirchhoff în raport cu tensiunile**:

1. *Se determină parametrii topologici:* numărul de noduri N, numărul de laturi L şi numărul de bucle fundamentale $O = L - N + 1$. La determinarea parametrilor topologici L şi N, trebuie ţinut seama de faptul că elementele conectate în serie trebuie considerate ca aparţinând unor laturi diferite, dar elementele conectate paralel pot fi considerate ca aparţinând aceleiaşi laturi;

2. *Se aleg sensurile de referinţă* şi se notează tensiunile $U_1, U_2, ..., U_L$, la bornele laturilor şi curenţii $I_1, I_2, ..., I_{N_{GT}}$ ce străbat generatoarele ideale de tensiune;

3. *Se scrie prima teoremă a lui Kirchhoff* sub formă particulară (2.43) pe toate nodurile cu excepţia unuia arbitrar. La scrierea relaţiei (2.43) trebuie ţinut seama de faptul că cele trei sume sunt algebrice, urmând ca pentru un nod laturile rezistenţă să contribuie cu $\pm G_k U_k$, laturile generator ideal de tensiune să contribuie cu curentul $\pm I_k$, iar laturile generator ideal de curent să contribuie cu $\pm J_k$; semnul plus se adoptă atunci când sensul de referinţă al mărimii U_k, I_k respectiv J_k intră în nod, iar semnul minus în caz contrar;

4. *Se alege un sistem de bucle independente*, pe care *se scrie a doua teoremă a lui Kirchhoff* sub formă generală (2.44). Pentru aceasta este util graful de tensiune redus al reţelei în care sunt notate tensiunile $U_1, U_2, ..., U_L$. La scrierea acestor (L-N+1) ecuaţii se va ţine seamă de faptul că tensiunile la bornele generatoarelor ideale de tensiune sunt cunoscute $U_k = \pm E_k$ şi că suma (2.44) este o sumă algebrică ;

5. *Se rezolvă sistemul* format din cele L ecuaţii algebrice liniare, determinându-se necunoscutele şi anume tensiunile $U_1, U_2, ..., U_L$, la bornele tuturor laturilor cu excepţia tensiunilor de la bornele generatoarelor ideale de tensiune, la care necunoscutele sunt curenţii $I_1, I_2, ..., I_{N_{GT}}$;

6. Pornind de la tensiunile determinate în etapa anterioară *se calculează curenţii* din laturile reţelei iniţiale aplicând ecuaţiile de funcţionare ale laturilor respective;

7. *Se verifică soluţia* obţinută aplicând una din următoarele metode:

- se verifică prima teoremă a lui Kirchhoff pe ultimul nod;
- se verifică teorema a doua a lui Kirchhoff pe o buclă ce nu face parte din sistemul de bucle independente ales;
- se verifică bilanţul puterilor (2.42).

Pentru **reducerea efortului de calcul** se pot utiliza următoarele tehnici:

1. Laturile conectate serie, paralel sau mixt se înlocuiesc cu generatoare echivalente de curent;

2. Generatoarele reale de tensiune se înlocuiesc cu generatoare reale de curent echivalente, micşorând în acest fel numărul de laturi deci şi dimensiunea sistemului;

3. Dacă în etapa **2** a algoritmului se notează cu $U_1, U_2, ..., U_{(N-1)}$ tensiunile din laturile unui arbore, iar tensiunile din coarde se notează direct pe figură ca sume algebrice ale tensiunilor de ramuri, atunci etapa **4** a algoritmului este inutilă, iar numărul ecuaţiilor din sistem scade de la L la $(N-1)$. Alegerea arborelui se face astfel încât acesta să conţină toate laturile generatoare de tensiune şi să nu conţină generatoare de curent.

PROBLEME

2.2.1. Să se scrie sistemul de ecuaţii asociat metodei generale a teoremelor lui Kirchhoff (2.27)-(2.30) pentru circuitele din figura 2.2.1.

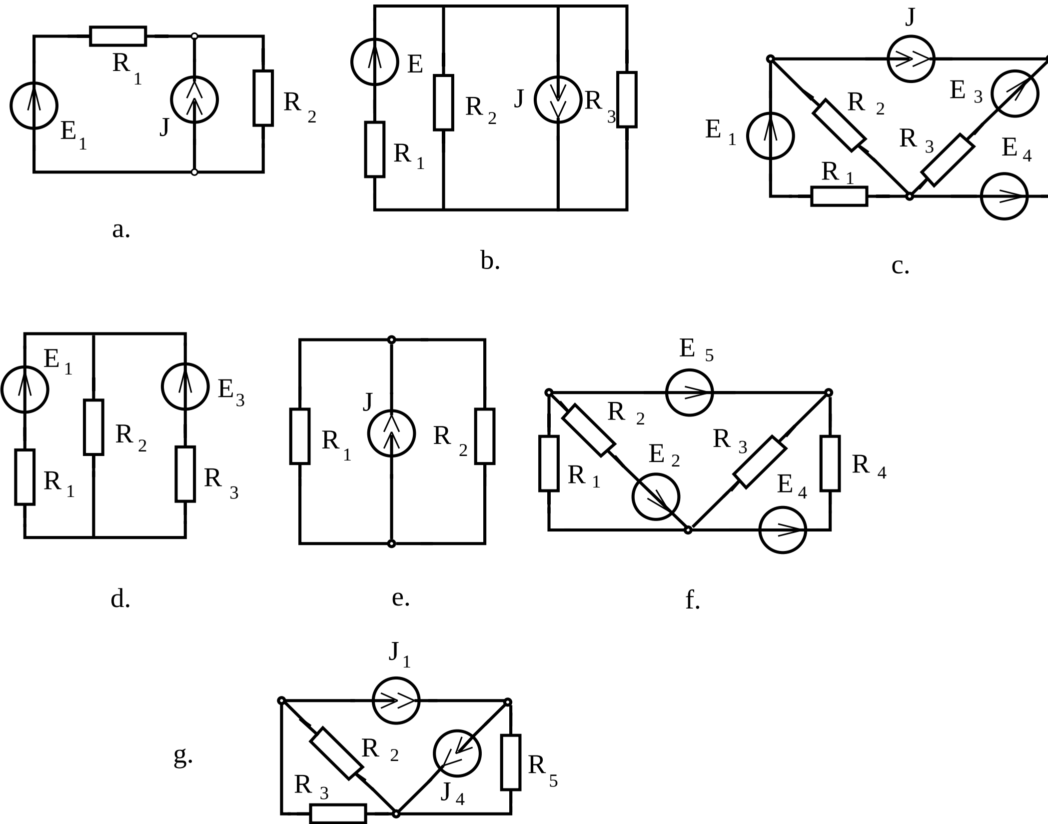
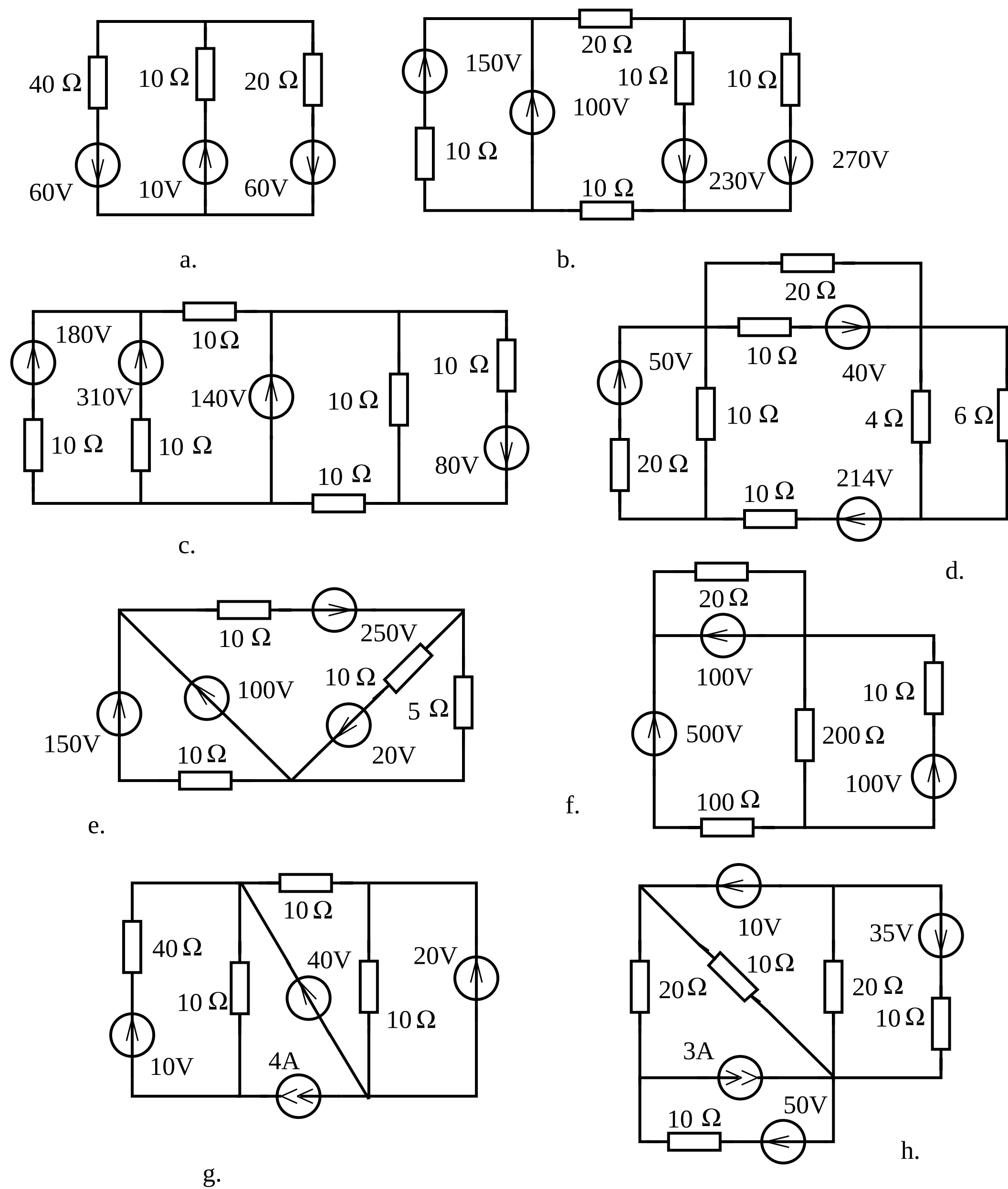


Fig. 2.2.1.

2.2.2. Să se analizeze circuitele din figura 2.2.2 cu ajutorul metodei lui Kirchhoff în raport cu curenţii. Se va verifica bilanţul puterilor.

2.2.3. Să se analizeze circuitele reprezentate în figura 2.2.2 cu ajutorul metodei ecuaţiilor lui Kirchhoff în raport cu curenţii utilizând tehnicile de reducere a efortului de calcul.

2.2.4. Să se analizeze circuitele reprezentate în figura 2.2.2 cu ajutorul metodei ecuaţiilor lui Kirchhoff în raport cu tensiunile. Se va verifica soluţia cu ajutorul bilanţului puterilor.



40 Ω
10 Ω
20 Ω
60V
10V
60V
a.
150V
20 Ω
10 Ω
10 Ω
100V
10 Ω
10 Ω
230V
270V
b.
180V
10 Ω
310V
140V
10 Ω
10 Ω
10 Ω
10 Ω
10 Ω
80V
c.
20 Ω
50V
10 Ω
40V
10 Ω
4 Ω
6 Ω
20 Ω
10 Ω
214V
d.
10 Ω
250V
100V
10 Ω
5 Ω
150V
10 Ω
20V
e.
20 Ω
100V
10 Ω
500V
200 Ω
100V
100 Ω
f.
10 Ω
40 Ω
40V
20V
10 Ω
10 Ω
10V
4A
g.
10V
35V
10 Ω
20 Ω
20 Ω
10 Ω
3A
50V
10 Ω
h.

Fig. 2.2.2.

2.2.5. Să se analizeze circuitele reprezentate în figura 2.2.2 cu ajutorul metodei teoremelor lui Kirchhoff în raport cu tensiunile utilizând tehnicile de reducere a efortului de calcul.

2.2.6. Să se scrie forma matriceală a ecuaţiilor Kirchhoff în raport cu curenţii pentru circuitele reprezentate în figura 2.2.1.

2.2.7. Să se scrie forma matriceală a ecuaţiilor Kirchhoff în raport cu tensiunile pentru circuitele reprezentate în figura 2.2.1.

2.2.8. Să se analizeze cu ajutorul metodei ecuatîilor lui Kirchhoff circuitele ale căror parametri au fost determinaţi în problema 1.4.13. Pentru rezolvare se va aplica acea variantă a metodei care este cea mai avantajoasă pentru problema respectivă.

2.2.9. Să se analizeze circuitele reprezentate în figurile 1.4.9, 1.4.11 şi 1.4.10 cu ajutorul metodei ecuaţiilor lui Kirchhoff.

2.2.10. Să se analizeze cu ajutorul metodei ecuaţiilor lui Kirchhoff circuitele reprezentate în figura 2.1.21.

2.2.11. Generaţi circuite electrice având parametrii topologici N, L impuşi şi apoi pornind de la tensiuni de ramuri şi curenţi de coarde arbitrari, calculaţi după modelul din problema 1.4.13, determinaţi parametrii elementelor. Analizaţi apoi circuitele generate cu ajutorul metodei teoremelor lui Kirchhoff.

2.3 Metoda curenţilor ciclici

BREVIAR

Metoda curenţilor ciclici este o metodă sistematică de rezolvare a problemei fundamentale a analizei circuitelor rezistive liniare. Ea este o metodă de substituţie în care necunoscutele principale sunt **curenţii ciclici**, adică un set de $O = L - N + 1$ curenţi fictivi care parcurg fiecare câte o buclă dintr-un set de bucle fundamentale. Dacă se notează matricea coloană a curenţilor ciclici cu i' atunci matricea curenţilor circuitului este:

$$i = B^T \cdot i', \tag{2.50}$$

în care B este matricea de apartenenţă a laturilor la bucle. Deoarece relaţia (2.50) permite determinarea curenţilor din toate laturile circuitului în funcţie de curenţii ciclici, metoda curenţilor ciclici reduce problema analizei unui circuit la determinarea curenţilor ciclici deci la rezolvarea unui sistem liniar cu $O = L - N + 1$ ecuaţii, reducând în acest fel efortul de calcul. Pentru determinarea sistemului de ecuaţii asociat acestei metode, se presupune latura standard a circuitului de forma celei din figura 2.16. În această situaţie, pe lângă mărimile caracteristice laturii U_k, I_k intervin tensiunea U_{Rk} şi curentul I_{Rk} prin rezistor, între acestea existând relaţiile :

$$I_k = I_{Rk} + J_k;$$
$$U_k = U_{Rk} - E_k,$$

sau sub formă matriceală:

$$i = i_R + j; \tag{2.51}$$

$$u = u_R - e, \tag{2.52}$$

unde:

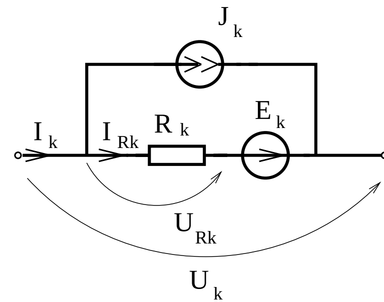


Fig. 2.16.

$$i = [I_1, I_2, ..., I_L]^T; \quad i_R = [I_{R1}, I_{R2}, ..., I_{RL}]^T;$$

$$u = [U_1, U_2, ..., U_L]^T; \quad u_R = \left[U_{R1}, U_{R2}, ..., U_{RL|}\right]^T;$$

$$j = [J_1, J_2, ..., J_L]^T; \quad e = [E_1, E_2, ..., E_L]^T.$$

Dacă se aplică a doua teoremă a lui Kirchhoff:

$$Bu = 0 \tag{2.53}$$

şi se ţine seama de ecuaţiile de funcţionare ale rezistoarelor:

$$U_R = R \cdot I_R, \tag{2.54}$$

în care $R = \text{diag}\,(R_1, R_2, ..., R_L)$ este o matrice pătrată ce conţine pe diagonală rezistenţele, atunci rezultă ecuaţia curenţilor ciclici: $BRB^T \cdot i' = B(e + Rj)$, sau utilizând notaţiile $R' = BRB^T,\ e' = B(E + RJ)$:

$$\boxed{R' \cdot i' = e'} \tag{2.55}$$

Din analiza elementelor matricii R' rezultă că $R'_{ij} = R'_{ji}$ reprezintă suma rezistenţelor de pe laturile comune buclelor i şi j, sumă considerată cu plus sau minus, după cum sensurile buclelor i şi j coincid sau nu în laturile comune. Elementul E_j al matricii e' reprezintă suma algebrică a tensiunilor electromotoare ale generatoarelor ideale de tensiune de pe ochiul j la care se adaugă tensiunile electromotoare echivalente generatoarelor de curent de pe acel ochi, transformate în generatoare de tensiune. Un caz degenerat îl reprezintă ochiurile în care există laturi ce conţin doar generatoare ideale de curent ($G_k = 0, R_k \to \infty$). Datorită rezistenţei infinite ecuaţia asociată ochiului respectiv nu are sens, în schimb curentul ciclic din ochiul respectiv va fi impus de generatorul ideal de curent. Pentru analiza manuală a unui circuit electric rezistiv liniar se parcurg următoarele etape ale **algoritmului metodei curenţitor ciclici:**

1. *Se determină parametrii topologici:* numărul de noduri N, numărul de laturi L şi numărul de bucle fundamentale $O = L - N + 1$ pentru circuitul în care generatoarele reale de curent au fost echivalate cu generatoare de tensiune;

2. *Se alege un sistem de bucle independente* notate cu $I_1', I_2', ..., I_0'$ pentru care se marchează sensurile de parcurs. La alegerea buclelor trebuie avut grijă ca prin fiecare generator ideal de curent să treacă o singură buclă şi nu mai multe, iar pe o buclă să se afle un singur generator de curent. Pentru alegerea buclelor fundamentale se poate utiliza un arbore care nu conţine generatoare de curent, urmând ca fiecare coardă să închidă o buclă fundamentală;

3. *Se scrie sistemul de ecuaţii* al metodei curenţilor ciclici:
$$\begin{cases} R'_{11}I'_1 + R'_{12}I'_2 + ...R'_{1O}I'_O = E'_1 \\ .... \\ R'_{O1}I'_1 + R'_{O2}I'_2 + ...R'_{OO}I'_O = E'_O \end{cases}$$
sistem care conţine O ecuaţii cu O necunoscute;

4. *Se elimină ecuaţiile degenerate* corespunzătoare buclelor ce conţin generatoare de curent, substituindu-le cu ecuaţii de forma $I_k' = \pm J_k$, în care semnul se determină în funcţie de orientarea sensului de parcurs al ochiului I_k' faţă de curentul electromotor J_k;

5. *Se calculează termenii diagonali* R'_{ii} din matricea sistemului, ca sumă a rezistenţelor de pe buclă;

6. *Se calculează termenii nediagonali* $R'_{ij} = R'_{ji}$ ca sumă a rezistenţelor de pe laturile comune buclelor i şi j, sumă luată cu semnul plus în cazul în care sensurile de parcurs ale buclelor coincid în laturile comune şi luate cu semnul minus în caz contrar;

7. *Se calculează termenii liberi* E'_j, ca sumă algebrică a tensiunilor electromotoare ale generatoarelor de tensiune de pe bucla j,convenţia de semn fiind aceeaşi ca la teorema a doua a lui Kirchhoff sub formă particulară;

8. *Se rezolvă sistemul* de ecuaţii algebrice cu una din metodele algebrei liniare determinându-se curenţii ciclici $I'_1, I'_2, ..., I'_O$;

9. *Se aleg sensurile de referinţă* şi se notează *curenţii* din laturile circuitului $I_1, I_2, ..., I_L$;

10. *Se calculează curenţii* din laturi ca sume algebrice ale curenţilor ciclici ce străbat latura respectivă;

11. *Se verifică soluţia* prin aplicarea teoremei a doua a lui Kirchhoff pe o buclă, alta decât cele parcurse de curenţii ciclici sau prin verificarea bilanţului de puteri.

Pentru estimarea efortului de calcul în metoda curenţilor ciclici este util să se observe că sistemul ce trebuie rezolvat are $L - N + 1 - N_{GC}$ necunoscute în care N_{GC} este numărul generatoarelor de curent. Din acest punct de vedere metoda curenţilor ciclici este avantajoasă faţă de metoda teoremelor lui Kirchhoff.

PROBLEME

2.3.1. Să se scrie ecuaţiile curenţilor ciclici pentru circuitele din figura 2.3.1.

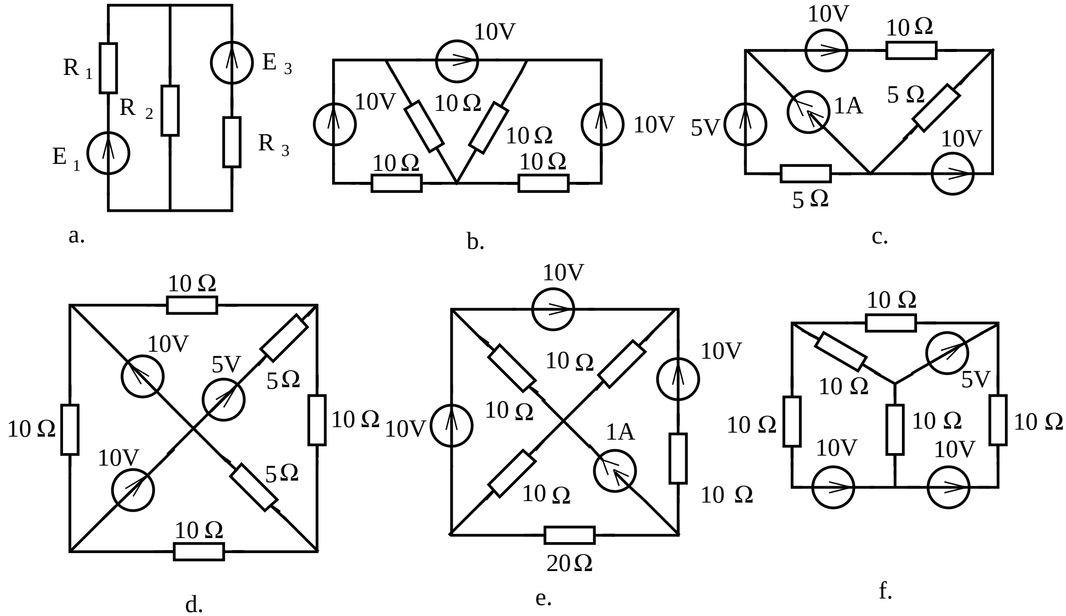


Fig. 2.3.1.

2.3.2. Să se calculeze curenţii din laturi în funcţie de curenţii ciclici la circuitele din figura 2.3.2.

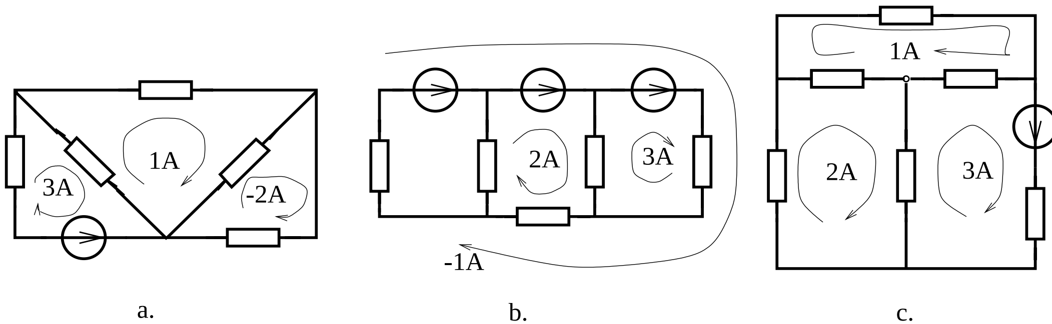


Fig. 2.3.2.

2.3.3. Să se analizeze circuitele din figura 2.3.3 cu ajutorul metodei curenţilor ciclici şi să se verifice bilanţul puterilor.

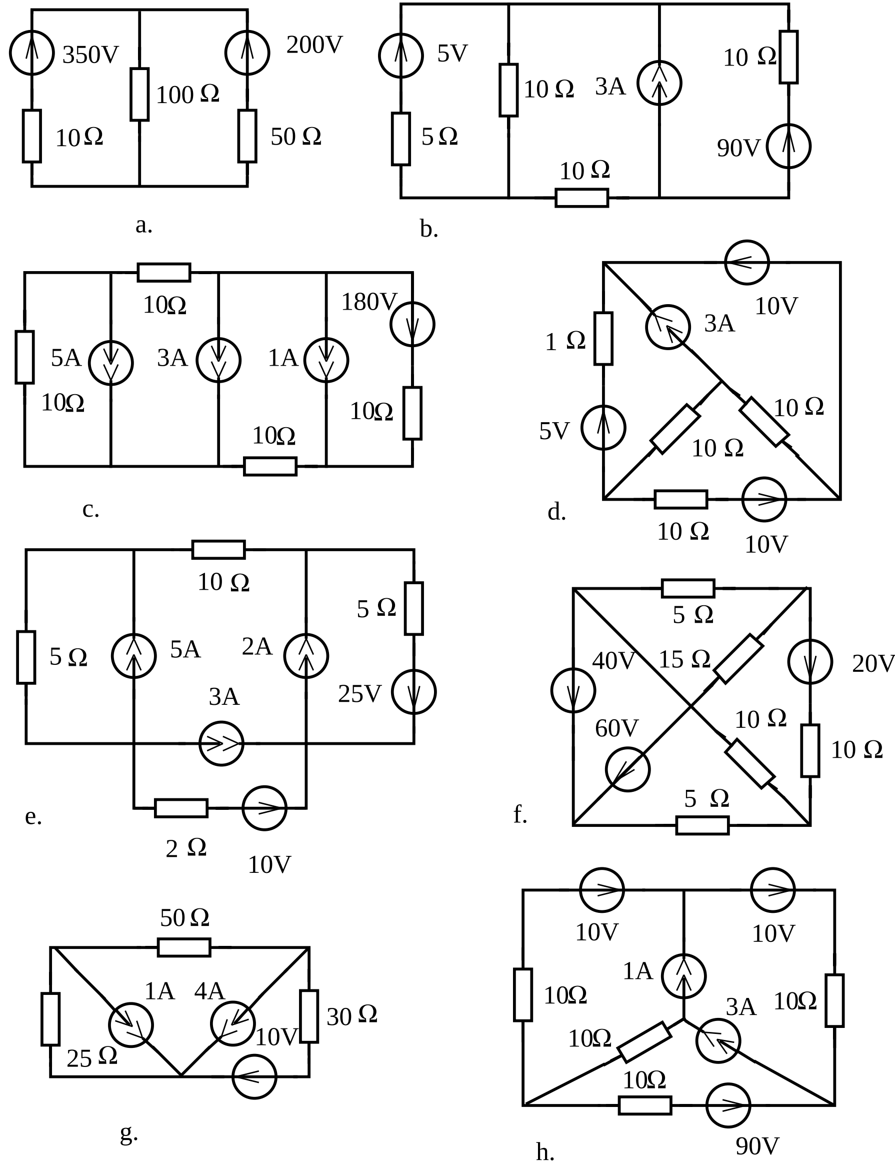


Fig. 2.3.3.

2.3.4. Să se analizeze cu ajutorul metodei curenţilor ciclici circuitele ale căror parametri au fost determinaţi în problema 1.4.13.

2.3.5. Să se analizeze cu ajutorul metodei curenţilor ciclici circuitele reprezentate în figurile 1.4.9, 1.4.11 şi 1.4.10.

2.4 Metoda potenţialelor nodurilor

BREVIAR

Metoda potenţialelor nodurilor este o metodă sistematică de analiză a circuitelor rezistive liniare, în care necunoscutele principale sunt **potenţialele nodurilor**.

Dacă se notează cu $v = [V_1, V_2, ..., V_{N-1}]^T$ vectorul potenţialelor nodurilor, presupunând ultimul potenţial nul, atunci vectorul tensiunilor la bornele laturilor este:

$$u = A^T \cdot v, \tag{2.56}$$

unde A este matricea redusă de incidenţă a laturilor la noduri. Deoarece relaţia (2.56) permite determinarea tensiunilor în toate laturile circuitului în funcţie de potenţiale, metoda potenţialelor reduce problema analizei unui circuit la determinarea potenţialelor prin rezolvarea unui sistem liniar de (N-1) ecuaţii, reducând în acest fel efortul de calcul faţă de metoda teoremelor lui Kirchhoff. Dacă se presupune latura standard de forma celei reprezentate în figura 2.16, atunci sunt valabile relaţiile (2.51),(2.52) şi pornind de la prima teoremă a lui Kirchhoff:

$$A \cdot i = 0 \tag{2.57}$$

şi ecuaţiile de funcţionare ale rezistoarelor:

$$i_R = G \cdot u_R, \tag{2.58}$$

în care $G = \text{diag}\,(G_1, G_2, ..., G_L)$, se obţine sistemul potenţialelor nodurilor $AGA^T v = -A(j + Ge)$, care, utilizând notaţiile $G' = AGA$, $J' = -A(j + Ge)$ capătă forma:

$$\boxed{G' \cdot v = j'}. \tag{2.59}$$

Analizând elementele matricii G' rezultă că $G'_{ij} = G'_{ji}$ reprezintă suma conductanţelor laturilor ce unesc nodurile i şi j, sumă luată cu semn schimbat, iar G'_{ii} reprezintă suma conductanţelor laturilor ce concură la nodul i. Elementul J'_i al vectorului J', reprezintă suma algebrică a curenţilor de scurtcircuit ai laturilor ce concura la nodul i. Curenţii de scurtcircuit se consideră cu plus atunci când săgeţile generatoarelor înţeapă nodul şi cu minus în caz contrar. Din acest motiv elementele J'_i se numesc injecţiile de curent în nod şi nu trebuie confundate cu suma curenţilor din laturile circuitului, care este nulă conform primei teoreme a lui Kirchhoff. Laturile de tip generator ideal de tensiune sunt laturi degenerate ($R = 0$, $G \to \infty$) şi trebuie tratate aparte în cadrul acestei metode. Pentru analiza manuală a unui circuit electric rezistiv liniar se parcurg următoarele etape ale **algoritmului** metodei potenţialelor la noduri:

1. *Se determină parametrii topologici:* numărul de noduri N şi numărul de laturi L;

2. *Se alege nodul de referinţă* analizând distribuţia în reţea a laturilor de tip generator ideal de tensiune (cu rezistenţă nulă pe latură). Dacă nu există astfel de laturi este preferabil ca nodul de referinţă să fie ales nodul cel mai stufos (la care vin cele mai multe laturi). Dacă există o singură latură generator ideal de tensiune, atunci nodul de referinţă se alege la una din bornele acestui generator (fig. 2.17.a). Dacă laturile generatoare ideale de tensiune formează un subgraf conex (fig. 2.17.b.), atunci nodul de referinţă se alege ca aparţinând acestui subgraf. Dacă laturile de tip generator ideal de tensiune formează subgrafuri neconexe atunci nodul de referinţă se alege ca aparţinând subgrafului cu cele mai multe generatoare (fig. 2.17.c).

a. b. c.

Fig. 2.17.

Dacă mulţimea laturilor de tip generator ideal de tensiune alcătuieşte subgrafuri neconexe atunci, se elimină cu ajutorul teoremei lui Vaschy generatoarele ce fac parte din subgrafurile ce nu conţin nodul de referinţă (ca în figura 2.18 ce se referă la reţeaua din figura 2.17.c). Se constată că eliminarea fiecărui generator determină apariţia a două "pseudo-noduri" conectate printr-un conductor perfect, ce pot fi considerate un singur nod. În felul acesta, cu fiecare generator eliminat scade cu o unitate numărul de noduri N;

3. *Se notează potenţialele nodurilor* $V_1, V_2, ..., V_{N-1}$ cu excepţia nodului de referinţă căruia i se atribuie potenţialul $V_0 = 0$;

4. *Se scrie sistemul* de ecuaţii liniare satisfăcut de potenţialele nodurilor:

$$\begin{cases} G'_{11}V_1 + G'_{12}V_2 + ... + G'_{1,N-1}V_{N-1} = J'_1 \\ ...., \\ G'_{N-1,1}V_1 + ... + G'_{N-1,N-1}V_{N-1} = J'_{N-1} \end{cases}$$

ce conţine $(N-1)$ ecuaţii cu $(N-1)$ necunoscute.

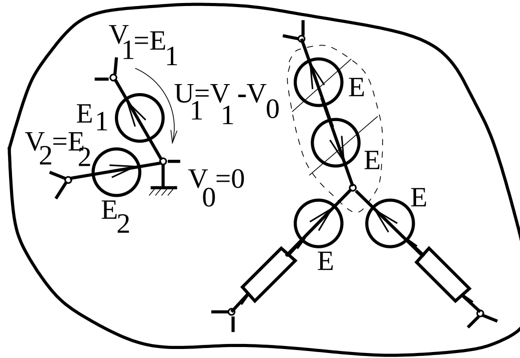


Fig. 2.18.

5. *Se elimină ecuaţiile degenerate* corespunzătoare nodurilor la care concură laturi de tip generator ideal de tensiune înlocuindu-se cu ecuaţii de forma $V_i = \pm E_i$ ce se determină ţinând cont de faptul că la acele noduri potenţialele sunt impuse de generatoarele ideale de tensiune (ca în figura 2.18).

6. *Se calculează termenii diagonali* ai matricii G'_{ii} ca suma conductanţelor laturilor ce concură la nodul i. Conductanţa unei laturi reprezintă inversul rezistenţei echivalente a laturii pasivizate. Prin pasivizarea unei laturi se înţelege înlocuirea generatoarelor prin rezistenţa lor internă;

7. *Se calculează termenii nediagonali* ai matricii $G'_{ij} = G'_{ji}$ ca fiind suma conductanţelor laturilor ce conectează direct nodul i cu nodul j, **sumă ce se consideră cu semnul minus**;

8. *Se calculează termenii liberi* $J_k{}'$ ca sumă algebrică a curenţilor de scurtcircuit ai laturilor ce concură la nodul k. În această sumă se consideră cu plus termenii corespunzatori generatoarelor a căror săgeată înţeapă nodul şi cu minus în caz contrar;

9. *Se rezolvă sistemul* de ecuaţii cu una din metodele algebrei liniare, determinându-se potenţialele $V_1, V_2, ..., V_{N-1}$;

10. *Se aleg sensurile de referinţă ale tensiunilor* la bornele laturilor şi se calculează aceste tensiuni ca diferenţă de potenţial $U_{ij} = V_i - V_j$;

11. *Se aleg sensurile de referinţă ale curenţilor* din laturi, se notează cu I_1,I_2, ...,I_L şi se calculează aceşti curenţi în funcţie de tensiunea la borne, aplicând ecuaţia de funcţionare a laturii. Curenţii din generatoarele ideale de tensiune se determină în reţeaua iniţială, prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff;

12. *Se verifică soluţia* prin aplicarea primei teoreme a lui Kirchhoff în nodul de referinţă sau prin verificarea bilanţului puterilor.

Pentru a estima efortul de calcul în această metodă se constată că sistemul de ecuaţii ce trebuie rezolvat are $N - 1 - N_{gt}$ ecuaţii, în care N_{gt} reprezintă numărul de laturi de tip generator ideal de tensiune. Din acest punct de vedere această metodă este avantajoasă faţă de metoda teoremelor lui Kirchhoff şi **mai avantajoasă decât metoda curenţilor ciclici**, dacă $N - N_{gt} - 1 \leq L - N - N_{gc} + 1$, unde N_{gc} este numărul generatoarelor ideale de curent.

PROBLEME

2.4.1. Să se scrie ecuaţiile potenţialelor la noduri pentru circuitele reprezentate în figura 2.4.1.

2.4.2. Să se analizeze circuitele din figura 2.4.1 cu ajutorul metodei potenţialelor la noduri şi să se verifice bilanţul puterilor.

2.4.3. Să se analizeze cu ajutorul metodei potenţialelor la noduri circuitele ale căror parametri au fost determinaţi în problema 1.4.13.

2.4.4. Să se analizeze cu ajutorul metodei potenţialelor nodurilor circuitele din figurile 1.4.9, 1.4.11 şi 1.4.10.

2.4.5. Să se analizeze circuitele din figura 2.4.1 cu metoda sistematică de analiză care necesită un efort de calcul minim.

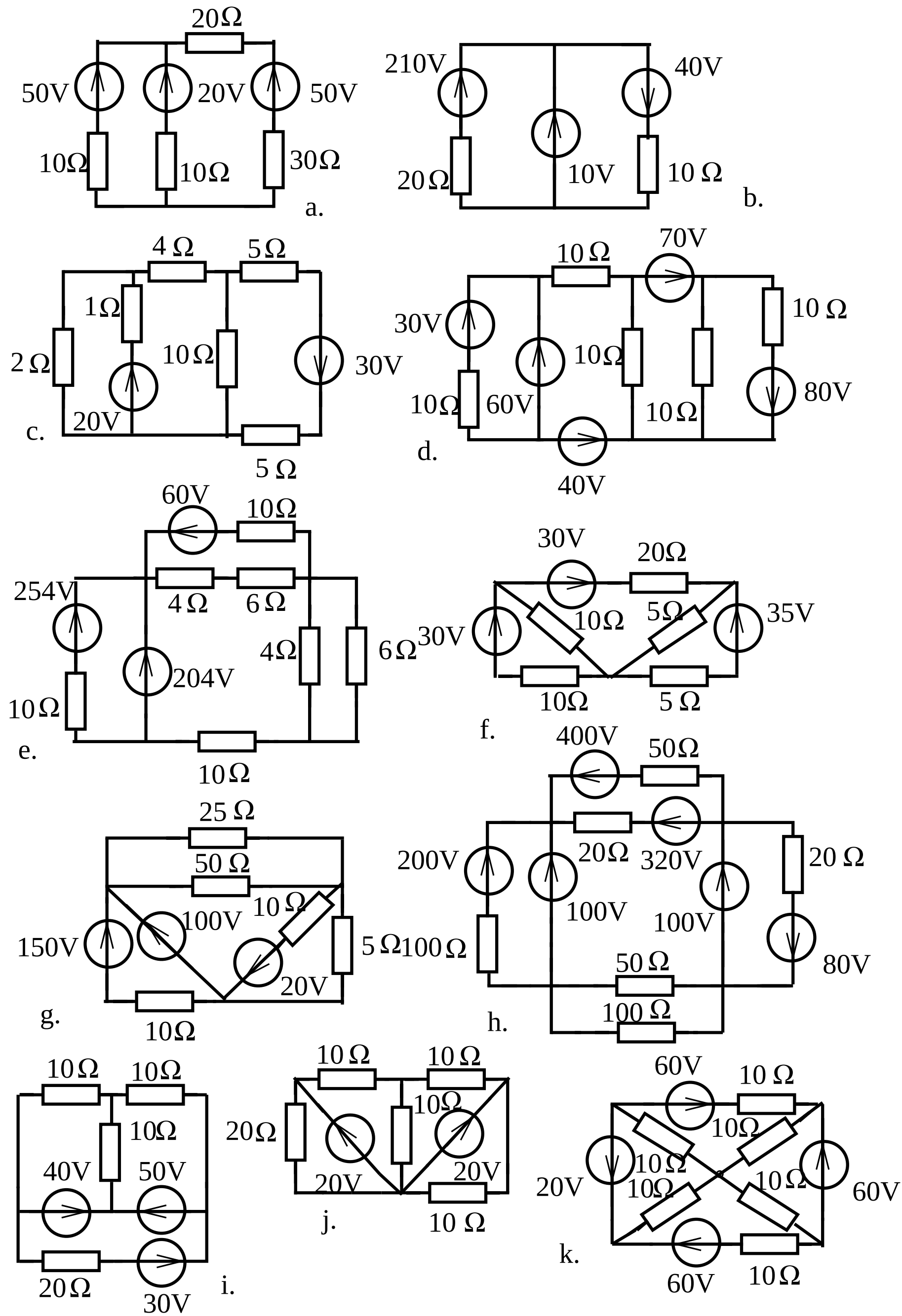

20Ω
50V
20V
50V
10Ω
10Ω
30Ω
a.
210V
40V
20Ω
10V
10 Ω
b.
4 Ω
5Ω
1Ω
2 Ω
10Ω
30V
20V
c.
5 Ω
10 Ω
70V
30V
10 Ω
10Ω
10Ω
60V
80V
10Ω
d.
40V
60V
10Ω
254V
4 Ω
6 Ω
4Ω
6Ω
204V
10Ω
e.
10Ω
30V
20Ω
30V
10Ω
5Ω
35V
10Ω
5 Ω
f.
400V
50Ω
25 Ω
50 Ω
10 Ω
150V
100V
5 Ω
20V
g.
10Ω
200V
20Ω
320V
20 Ω
100V
100V
100Ω
50Ω
80V
100 Ω
h.
10Ω
10Ω
10Ω
40V
50V
20Ω
30V
i.
10 Ω
10 Ω
10Ω
20Ω
20V
20V
10 Ω
j.
60V
10 Ω
10Ω
20V
10Ω
10Ω
10Ω
60V
k.
60V
10Ω

Fig. 2.4.1.

2.5 Metodele Thévenin şi Norton

Relaţia lui Thévenin exprimă curentul printr-o rezistenţă R_{AB} (fig. 2.19.a) a unei reţele liniare:

$$\boxed{I_{AB} = \frac{U_{AB_0}}{R_{AB} + R_{AB_0}}}, \tag{2.60}$$

în care U_{AB_0} este tensiunea de mers în gol a reţelei (fig. 2.19.b), iar R_{AB_0} este rezistenţa echivalentă a reţelei pasivizate (fig. 2.19.c).

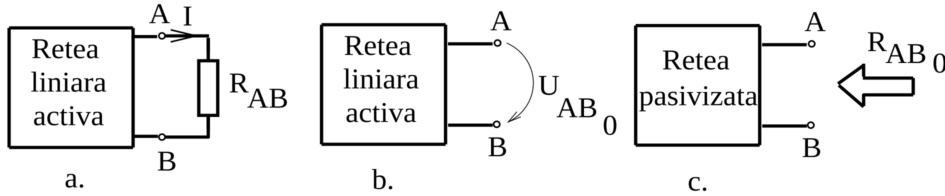


Fig. 2.19.

Pentru calculul curentului dintr-o latură a unui circuit se parcurg următoarele etape ale **algoritmului Thévenin**:

1. *Se aleg bornele A şi B* pe latura în care interesează curentul cu condiţia ca între bornele alese pe latura respectivă să nu existe surse;

2. Se elimină rezistorul R_{AB} (înlocuindu-l cu un izolator perfect) şi *se calculează tensiunea de mers în gol* U_{AB_0} cu una din metodele sistematice de analiză (metoda Kirchhoff, metoda curenţilor ciclici sau metoda potenţialelor nodurilor). Se constată că reţeaua ce trebuie analizată are cu o latură mai puţin decât cea iniţială;

3. Se pasivizează reţeaua şi *se calculează rezistenţa echivalentă* R_{AB_0} între bornele A şi B (cu rezistorul R_{AB_0} eliminat). Pentru pasivizare se înlocuiesc generatoarele cu rezistenţele lor interne ca în figura 2.20.

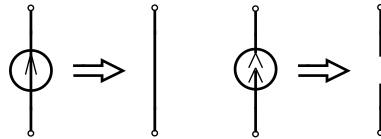


Fig. 2.20.

Pentru calculul rezistenţei echivalente R_{AB_0} se utilizează una din următoarele metode:

a. Transfigurări serie-paralel, stea-triunghi sau triunghi-stea;

b. Se alimentează circuitul pasiv cu un generator ideal de tensiune electromotoare E şi se calculează curentul absorbit de reţea cu ajutorul unei metode sistematice de analiză (fig. 2.21.a), urmând ca $R_{AB_0} = E/I$;

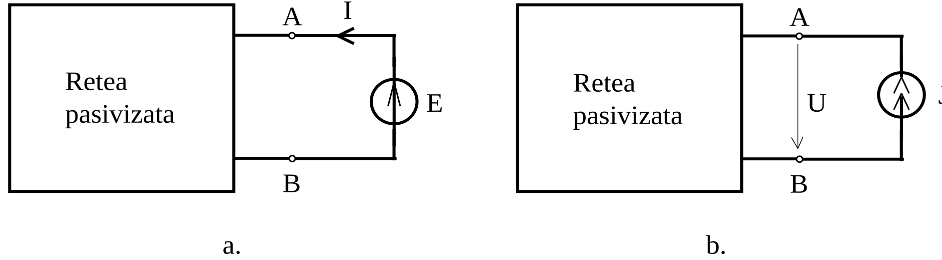


Fig. 2.21.

c. Se alimentează circuitul pasiv cu un generator ideal de curent electromotor J şi se calculează tensiunea U la bornele AB cu ajutorul unei metode sistematice de analiză (fig. 2.21.b), urmând ca $R_{AB_0} = U/J$;

d. Se calculează curentul de scurtcircuit $I_{sc_{AB}}$ al reţelei (fig. 2.22.b), urmând ca rezistenţa reţelei pasivizate să fie:

$$R_{AB_0} = \frac{U_{AB_0}}{I_{sc\,AB}}. \tag{2.61}$$

4. Se calculează curentul I_{AB} cu relaţia (2.60);

5. Se calculează tensiunea la bornele rezistenţei R_{AB} cu relaţia:

$$U_{AB} = R_{AB} \cdot I_{AB}. \tag{2.62}$$

Relaţia lui Norton permite calculul tensiunii la bornele unui rezistor de conductanţă G_{AB} dintr-o reţea liniară (fig. 2.22.a):

$$\boxed{U_{AB} = \frac{I_{sc\,AB}}{G_{AB} + G_{AB_0}}\ ,} \tag{2.63}$$

în care $I_{sc_{AB}}$ este curentul de scurtcircuit al reţelei (fig. 2.22.b), iar $G_{AB_0} = 1/R_{AB_0}$ este conductanţa echivalentă a reţelei pasivizate (fig. 2.22.c).

Algoritmul metodei Norton cuprinde următoarele etape:

1. *Se aleg bornele* A şi B pe latura în care interesează tensiunea astfel încât între acestea să nu existe o sursă ci doar un element pasiv;

2. *Se scurtcircuitează bornele* A şi B prin înlocuirea rezistorului dintre ele cu un conductor perfect şi *se calculează curentul de scurtcircuit* $I_{sc_{AB}}$ prin acel conductor cu una din metodele sistematice de analiză;

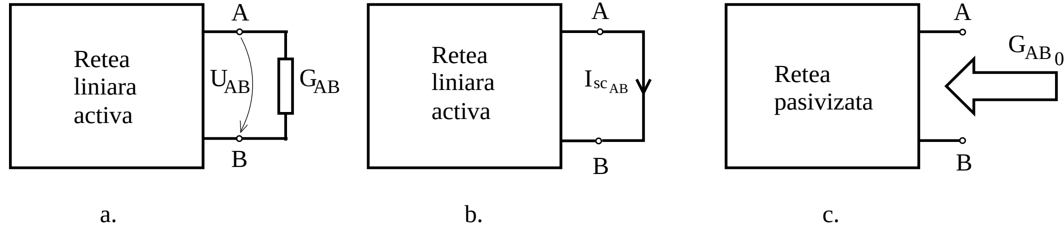


Fig. 2.22.

3. *Se pasivizează reţeaua* prin înlocuirea generatoarelor cu rezistenţele lor interne (fig. 2.20) şi se calculează conductanţa echivalentă $G_{AB_0} = 1/R_{AB_0}$ cu una din metodele prezentate la punctul **3** al algoritmului Thévenin;

4. *Se calculează tensiunea* U_{AB} la bornele rezistorului de conductanţă G_{AB} cu relaţia (2.63);

5. *Se calculează intensitatea curentului* prin rezistorul de conductanţă G_{AB} cu relaţia:

$$I_{AB} = G_{AB} \cdot U_{AB}. \qquad (2.64)$$

Metodele Th évenin şi Norton permit atât calculul curentului cât şi al tensiunii la bornele unui rezistor. Alegerea uneia sau alteia dintre cele două metode se face din considerente topologice în vederea micşorării efortului de calcul. De exemplu, la circuitele de tipul celui prezentat în figura 2.23.a este avantajoasă aplicarea metodei Thévenin, pe când la circuitele de tipul celui prezentat în figura 2.23.b este avantajoasă metoda Norton.

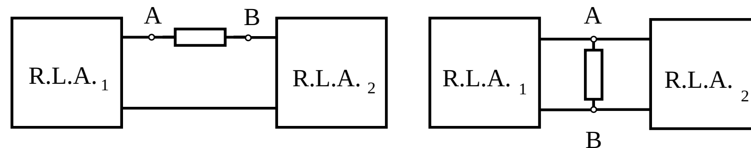


Fig. 2.23.

Procedând în acest mod, la calculul mărimii U_{AB_0} sau $I_{sc_{AB}}$ se constată că cele două subreţele $R.L.A._1$ şi $R.L.A._2$ funcţionează independent, lucru ce micşorează efortul de calcul.

Deoarece metodele Thévenin şi Norton pun în evidenţă **generatoarele echivalente de tensiune** (U_{AB_0}, R_{AB_0}) şi respectiv **de curent** ($I_{sc_{AB}}, G_{AB_0}$), aceste metode sunt utile în cazul în care se studiază curentul printr-un rezistor la diferite valori ale rezistenţei (fig. 2.24). În această situaţie *metodele Thévenin şi Norton sunt net avantajoase faţă de metodele sistematice de analiză.*

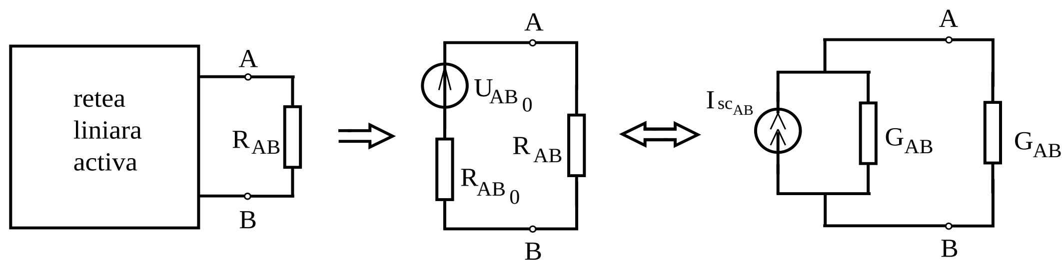


Fig. 2.24.

Teorema transferului maxim de putere afirmă că puterea P disipată de un rezistor de rezistenţă R_{AB} conectat într-o reţea este maximă atunci când rezistenţa R_{AB} este egală cu rezistenţa echivalentă a reţelei pasivizate R_{AB_0}:

$$\boxed{\max_{R_{AB}} P(R_{AB}) = P(R_{AB_0})} \tag{2.65}$$

PROBLEME

2.5.1. Să se calculeze intensitatea curentului I la circuitele reprezentate în figura 2.5.1, aplicând metoda teoremei Thévenin.

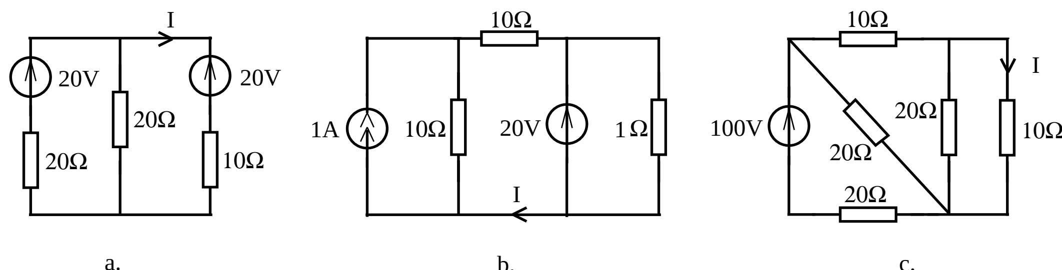


Fig. 2.5.1.

2.5.2. Să se calculeze tensiunea U la circuitele reprezentate în figura 2.5.2, aplicând metoda teoremei Norton.

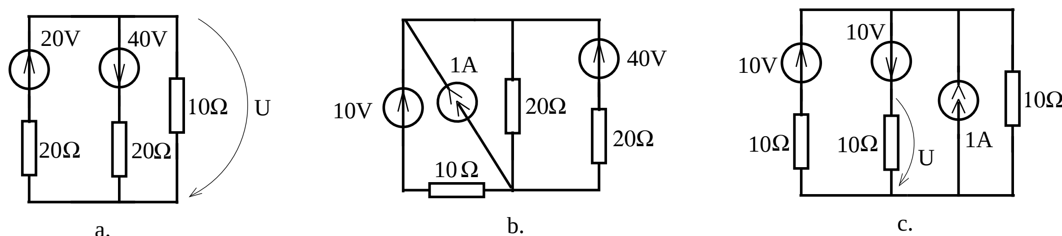


Fig. 2.5.2.

2.5.3. Să se calculeze intensitatea curentului prin rezistoarele a căror tensiune la borne este U, aplicând metoda teoremei Norton la circuitele reprezentate în figura 2.5.2.

2.5.4. Să se calculeze intensitatea curentului şi tensiunea la bornele rezistoarelor notate cu R din circuitele reprezentate în figura 2.5.3. Se va aplica metoda cea mai avantajoasă dintre metodele Thévenin sau Norton.

2.5.5. Să se calculeze curenţii şi tensiunile la bornele rezistoarelor R reprezentate în figura 2.5.3 atunci când $R = 10\Omega$ şi $R = 20\Omega$.

2.5.6. În cazul circuitelor din figura 2.5.3 să se calculeze rezistenţa R, astfel încât ea să disipe putere maximă. Cât este această putere?

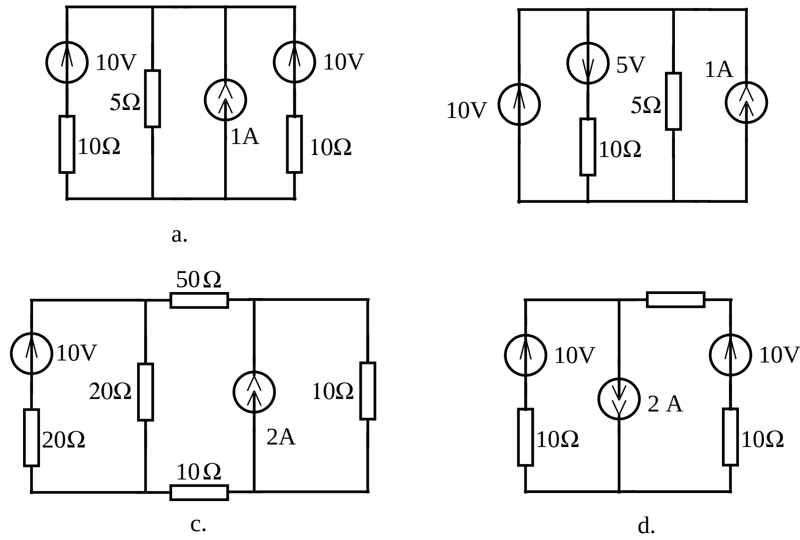


Fig. 2.5.3.

2.5.7. Ce rezistenţă trebuie conectată între bornele A şi B ale circuitelor din figura 2.1.22 pentru ca ea să disipe putere maximă?

2.5.8. Să se calculeze intensitatea curentului I la circuitele reprezentate în figura 2.1.21 cu ajutorul metodei Thévenin sau Norton. Ce valoare trebuie să aibă rezistenţa parcursă de curentul I pentru ca ea să disipe putere maximă? Să se determine valoarea acestei puteri.

2.6 Circuite electrice liniare nereciproce

BREVIAR

Circuitele electrice care conţin surse comandate nu satisfac teorema de reciprocitate, motiv pentru care ele fac parte din categoria reţelelor nereciproce. Analiza circuitelor liniare ce conţin astfel de surse se poate face utilizând **metodele sistematice de rezolvare:** metoda teoremelor lui Kirchhoff, metoda curenţilor ciclici sau metoda potenţialelor nodurilor.

Pentru aplicarea acestor metode se utilizează algoritmii prezentaţi în paragrafele anterioare făcând abstracţie, iniţial, de caracterul comandat al surselor. După ce au fost scrise ecuaţiile, înainte de rezolvarea sistemului liniar se adaugă o nouă etapă în algoritmi, şi anume exprimarea tensiunilor electromotoare şi a curenţilor electromotori ce corespund surselor comandate în funcţie de necunoscutele principale ale metodei: curenţii din laturi în metoda teoremelor lui Kirchhoff raportată la curenţi; tensiunile în metoda Kirchhoff referitoare la tensiuni; curenţii ciclici în metoda curenţilor ciclici şi potenţialele nodurilor în metoda potenţialelor nodurilor. Pentru aceasta se exprimă mărimile de comandă în funcţie de necunoscutele principale ale problemei, utilizând ecuaţiile de funcţionare ale laturilor de comandă şi apoi se trec necunoscutele nou apărute din membrul drept în membrul stâng al ecuaţiei. În urma acestei operaţii, de regulă, matricea curenţilor ciclici sau a potenţialelor de noduri îşi pierde simetria, lucru ce explică nereciprocitatea circuitului ce conţine surse comandate.

Efortul de calcul în această etapă este mai mic, dacă la circuitele ce conţin surse comandate în curenţi se aplică metoda teoremelor lui Kirchhoff raportată la curenţi sau metoda curenţilor ciclici, iar la circuitele ce conţin generatoare comandate în tensiuni se aplică metoda lui Kirchhoff raportată la tensiuni sau metoda potenţialelor nodurilor.

Analiza circuitelor cu generatoare comandate se poate face utilizând **metoda teoremelor Thévenin sau Norton**, dar cu anumite restricţii impuse la calculul rezistenţei reţelei pasivizate R_{AB_0} şi anume pasivizarea reţelei conform figurii 2.20 se aplică doar surselor independente, nu şi celor comandate. Acest lucru face imposibil calculul rezistenţei R_{AB_0} cu ajutorul metodei transformării serie-paralel, fiind necesară aplicarea uneia din celelalte trei metode de calcul a rezistenţei R_{AB_0}, prezentate în algoritmul Thévenin.

Observaţii *referitoare la circuitele cu surse comandate*:

a. Circuitele ce conţin doar rezistoare liniare şi surse comandate liniar admit ca soluţie a problemei de analiză soluţia banală (toţi curenţii şi toate tensiunile sunt nule). Din această observaţie rezultă că sursele comandate liniar nu pot fi "surse de curent" într-un circuit electric, doar generatoarele independente pot avea acest statut.

b. Un circuit ce conţine rezistoare liniare şi surse comandate liniar este echivalent faţă de orice pereche de borne A, B cu un rezistor. Este posibil ca rezistenţa echivalentă R_{AB} să fie negativă, chiar dacă toate rezistenţele au rezistenţă pozitivă.
Pe baza acestor observaţii rezultă că generatoarele comandate având ecuaţia de funcţionare liniară se aseamănă cu rezistoarele şi nu cu generatoarele independente.

c. Un circuit cu rezistenţe strict pozitive şi generatoare independente ce nu sunt în exces are soluţie unică, dar nu se poate afirma acelaşi lucru despre un circuit ce conţine şi surse comandate.

d. Conform teoremei substituţiei, un generator independent poate fi înlocuit cu un generator comandat, aceasta fiind una din tehnicile de generare a problemelor cu surse comandate. Aplicând teorema substituţiei în acest fel este posibil să se piardă unicitatea soluţiei.

Una din aplicaţiile cele mai importante ale surselor comandate constă în modelarea unei componente electronice frecvent întâlnită în aplicaţii, numită amplificator operaţional. **Amplificatorul operaţional** are simbolul prezentat în figura 2.25.a, simbol ce pune în evidenţă două borne de intrare notate cu + (intrarea neinversoare) şi − (intrarea inversoare), o bornă de masă, o bornă de ieşire notată cu O şi două borne de alimentare, având potenţialele $+V_a$ şi respectiv $-V_a$.

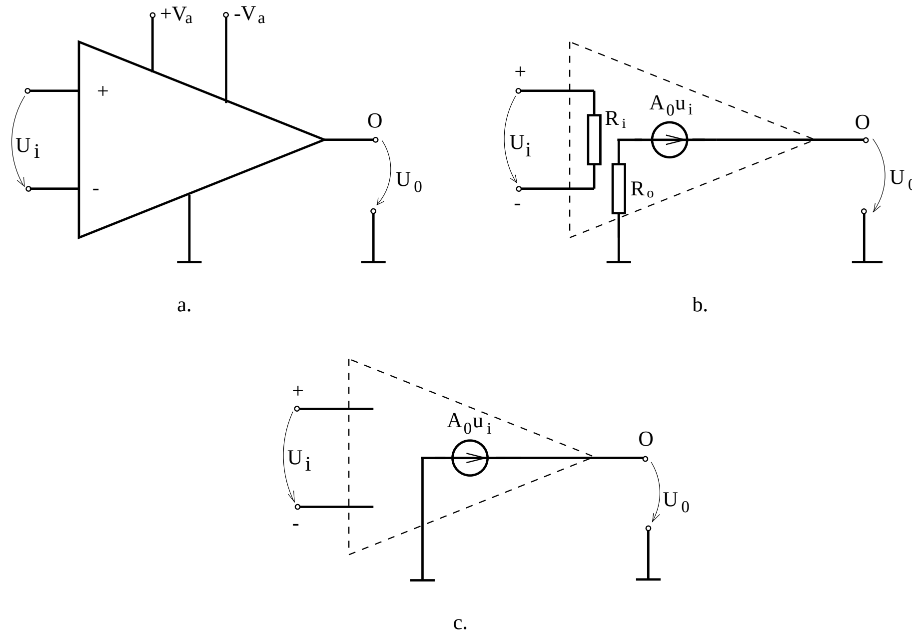


Fig. 2.25.

Comportarea amplificatorului operaţional între bornele de intrare este asemănătoare cu cea a unui rezistor de rezistenţă R_i (*rezistenţă de intrare*). Între borna de ieşire şi borna de masă, amplificatorul operaţional se comportă ca un generator de tensiune comandat în tensiunea de intrare, în serie cu o *rezistenţă de ieşire* R_o. Coeficientul de transfer A_0 al sursei comandate, se numeşte "*amplificarea în buclă deschisă*" a amplificatorului operaţional.

Deoarece rezistenţa de intrare R_i este mult mai mare decât rezistenţele uzuale dintr-un circuit electronic, iar rezistenţa de ieşire R_o este mult mai mică decât rezistenţele din restul circuitului, deseori se utilizează *modelul simplificat* al amplificatorului operaţional constând într-o sursă de tensiune comandată în tensiune, prezentat în figura 2.25.c şi obţinut presupunând $R_i = \infty$ şi $R_o = 0$.

Specific amplificatoarelor operaţionale este şi faptul că amplificarea în buclă deschisă este foarte mare, $A > 10^5$. Acest lucru permite ca în anumite cazuri (de exemplu în circuitele cu reacţie negativă) să se poată presupune $A_0 \to \infty$. Pentru ca într-un circuit în care coeficientul A_0 tinde spre infinit să se obţină tensiuni finite este necesar ca u_i să tindă către zero. În acest model, numit amplificator operaţional perfect, poarta de intrare are proprietăţi cu totul speciale, impunând anularea atât a tensiunii cât şi a curentului, pe când la poarta de ieşire atât tensiunea cât şi curentul pot avea orice valoare. În ultimă instanţă, curentul şi tensiunea de ieşire sunt stabilite de restul circuitului şi nu de elementul considerat. Modelul perfect al amplificatorului operaţional pune în evidenţă două elemente dipolare de circuit complet degenerate, numite nulator şi norator.

Nulatorul este elementul dipolar (fig. 2.26.a) având ecuaţiile de funcţionare:

$$\begin{cases} u = 0, \\ i = 0. \end{cases} \tag{2.66}$$

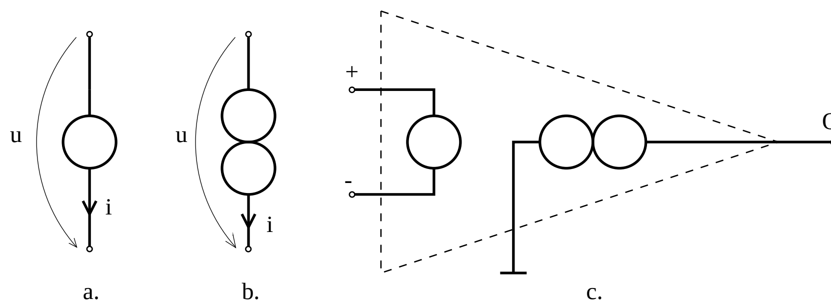


Fig. 2.26.

Noratorul este elementul dipolar de circuit electric cu simbolul prezentat în figura 2.26.b la care tensiunea la borne u şi curentul i pot avea orice valoare.

Cu ajutorul acestor elemente de circuit, amplificatorul operaţional poate fi modelat prin schema echivalentă prezentată în figura 2.26.c. Perechea de elemente degenerate ce alcătuiesc această schemă echivalentă se numeşte **nulor**.

PROBLEME

2.6.1. Să se stabilească condiţiile de echivalenţă între elementele de circuit prezentate în figura 2.6.1.

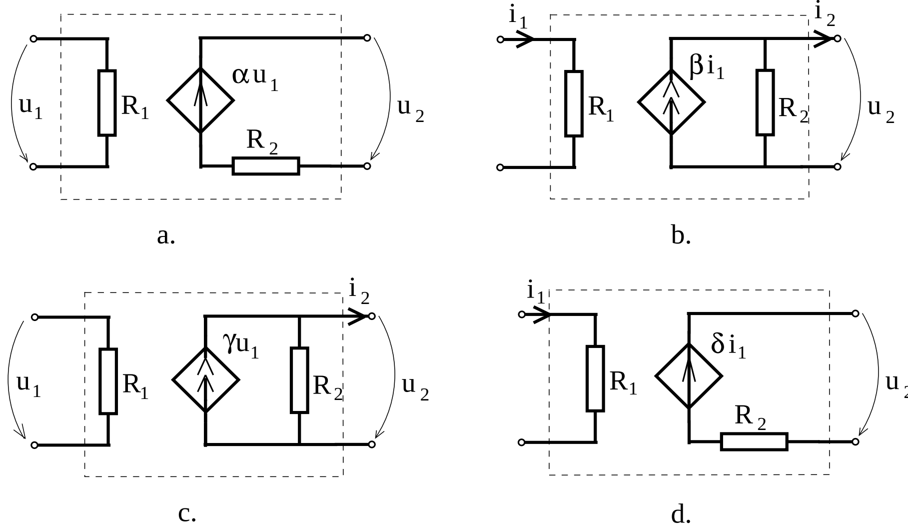


Fig. 2.6.1.

2.6.2. Să se determine elementul echivalent grupării serie a unui nulator cu unul din elementele ideale: rezistor, conductor perfect, izolator perfect, generator ideal de tensiune, generator ideal de curent şi norator. Să se rezolve problema în cazul grupării paralel a elementelor ideale.

2.6.3. Să se determine elementul echivalent grupării serie a unui norator cu unul din elementele ideale: rezistor, conductor perfect, izolator perfect, generator ideal de tensiune şi generator ideal de curent. Să se rezolve problema în cazul grupării în paralel a acestor elemente ideale.

2.6.4. Să se determine rezistenţa echivalentă între bornele A şi B pentru circuitele reprezentate în figura 2.6.2.

2.6.5. Să se analizeze circuitele reprezentate în figura 2.6.3 cu ajutorul metodelor sistematice de analiză.

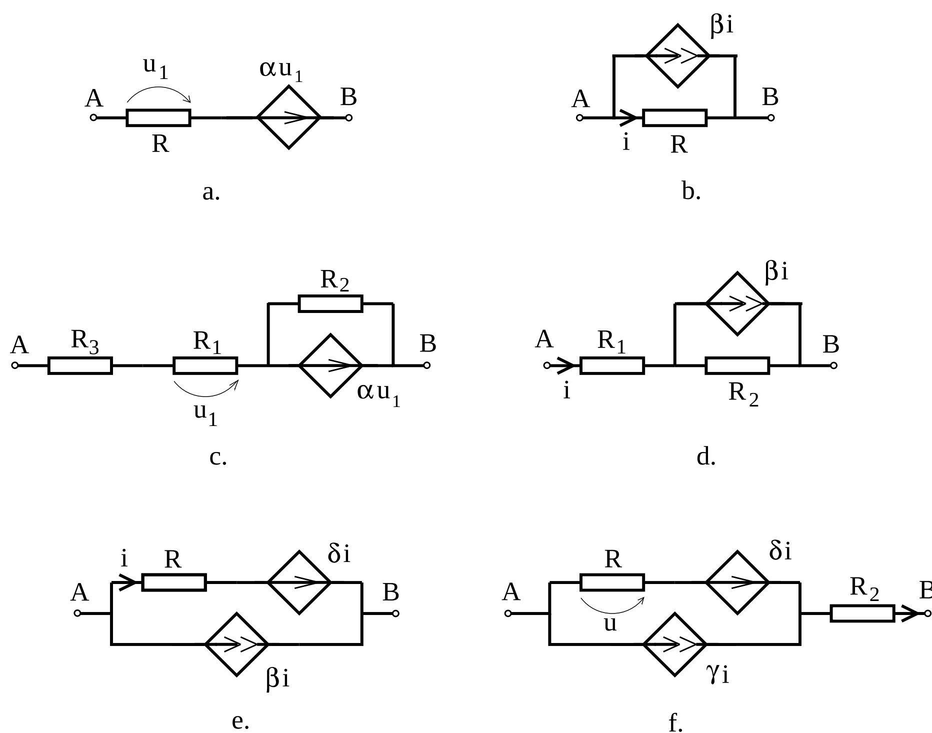


Fig. 2.6.2.

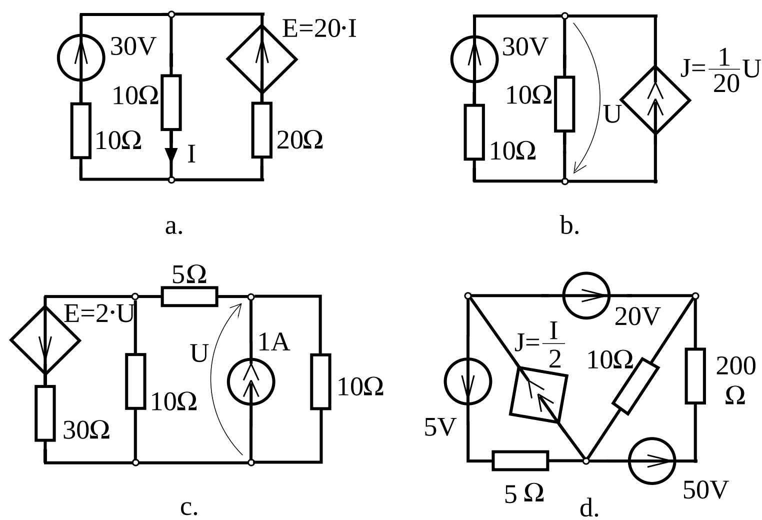


Fig. 2.6.3.

2.6.6. Circuitul reprezentat în figura 2.6.4.a poartă numele de amplificator inversor cu reacţie negativă. Acest circuit poate fi echivalat cu schema din figura 2.6.4.b. Utilizând schema echivalentă a amplificatorului operaţional prezentată în figura 2.25.b, să se determine rezistenţa de intrare echivalentă R_{ie}, rezistenţa de ieşire echivalentă R_{oe} şi amplificarea A a circuitului. Să se determine valorile acestor parametri dacă se utilizează schema echivalentă a amplificatorului operaţional prezentată în figura 2.25.b. Care este valoarea amplificării A, atunci când amplificarea în bucla deschisă A_0 tinde către infinit?

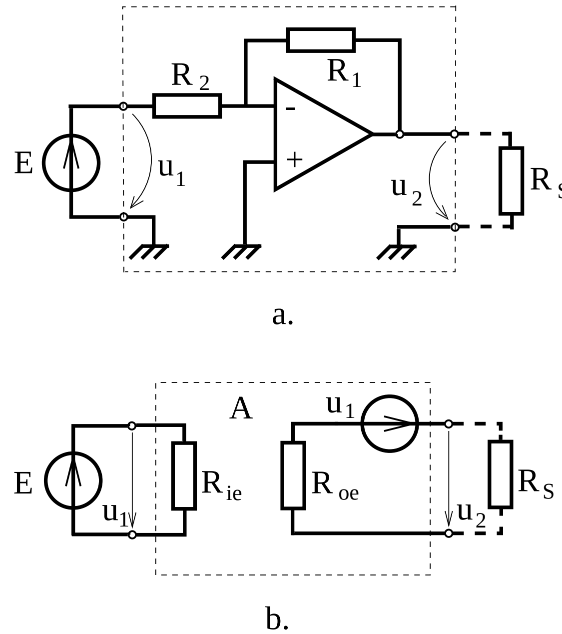


Fig. 2.6.4.

2.6.7. Să se calculeze rezistenţa echivalentă de intrare R_{ie}, rezistenţa echivalentă de ieşire R_{oe} şi amplificarea echivalentă A pentru circuitul de tip amplificator neinversor prezentat în figura 2.6.5.

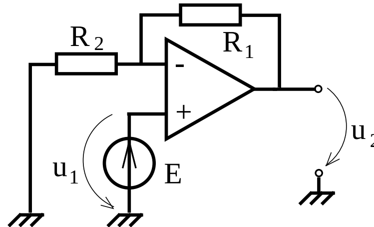


Fig. 2.6.5.

Calculele vor fi efectuate utilizând, pe rând, cele trei modele ale amplificatorului

operaţional reprezentate în figurile 2.25.b, 2.25.c şi 2.26.c.

2.6.8. Să se calculeze tensiunile de ieşire U_2 pentru circuitul sumator reprezentat în figura 2.6.6.a şi circuitul de diferenţă reprezentat în figura 2.6.6.b. Se va utiliza schema echivalentă a amplificatorului operaţional prezentată în figura 2.25.c, iar în final se va discuta cazul în care $A_0 \to \infty$.

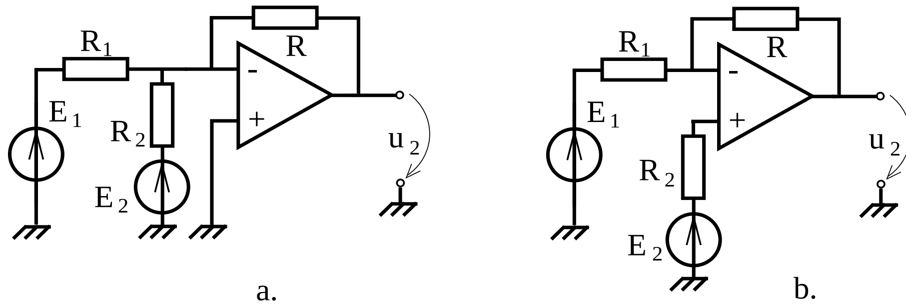


Fig. 2.6.6.

2.6.9. Să se calculeze rezistenţa de intrare, rezistenţa de ieşire şi amplificarea circuitului repetor reprezentat în figura 2.6.7. Să se calculeze eroarea care se face asupra tensiunii de ieşire atunci când se adoptă modelul perfect pentru amplificatorul operaţional, dacă parametrii amplificatorului operaţional au valorile $R_i = 10M\Omega$, $A_0 = 10^5$, $R_0 = 10\Omega$.

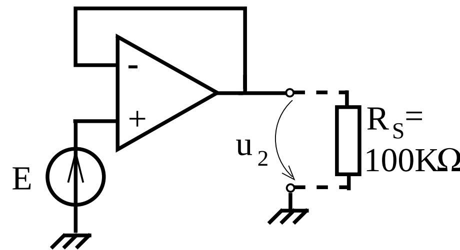


Fig. 2.6.7.

2.6.10. Să se arate că circuitele reprezentate în figura 2.6.8 pot simula următoarele tipuri de surse comandate: (a) sursa de tensiune comandată în curent, (b) sursa de curent comandată în curent, (c) sursa de curent comandată în tensiune. S-a notat cu R_s rezistenţa de sarcină conectată la bornele sursei comandate iar cu i_1 şi u_1 mărimile de comandă. Calculele vor fi efectuate cu ajutorul schemei echivalente din figura 2.25.c, la care se va presupune $A_0 \to \infty$.

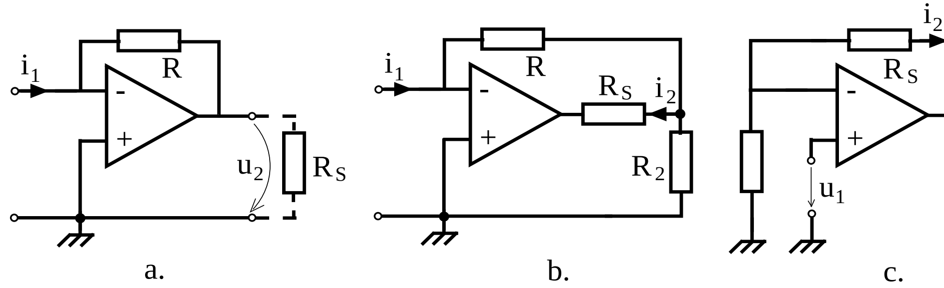


Fig. 2.6.8.

2.6.11. Circuitele cuadripolare prezentate în figurile 2.6.9.a şi b se numesc convertoare de negativare INIC, respectiv UNIC. Să se stabilească relaţia dintre mărimile de intrare i_1, u_1 şi mărimile de ieşire i_2, u_2. Să se arate că rezistenţa echivalentă între bornele de intrare A şi B este opusul rezistenţei conectate între bornele de ieşire. Se va utiliza modelul perfect al amplificatorului operaţional.

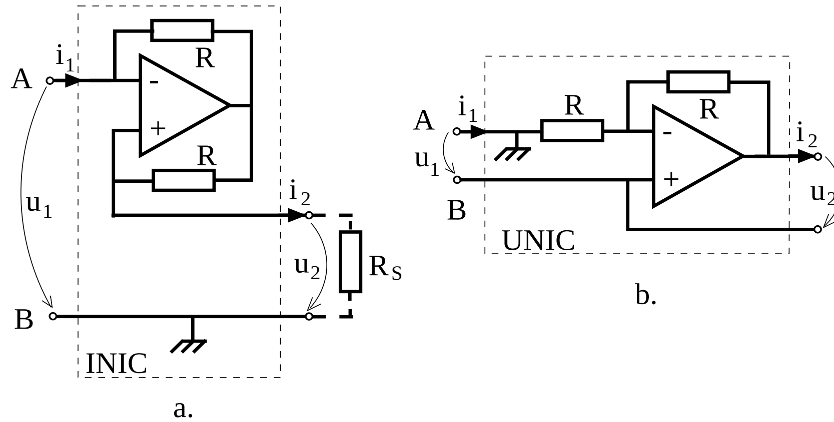


Fig. 2.6.9.

2.6.12. Să se calculeze erorile ce se fac asupra mărimilor de ieşire ale circuitelor prezentate în figurile 2.6.4 - 2.6.9 atunci când se utilizează pentru amplificatorul operaţional modelul cu nulor în locul schemei din figura 2.25.c.

2.6.13. Pornind de la observaţia că un norator poate fi substituit cu un generator de curent având curentul electromotor nedeterminat să se genereze un algoritm de analiză cu metoda potenţialelor de noduri pentru circuite ce conţin noratori.

2.7 Teoremele circuitelor rezistive liniare

BREVIAR

În acest paragraf sunt analizate acele teoreme ale circuitelor electrice liniare care pun în evidenţă corelaţii între soluţia problemei de analiză şi datele acestei probleme. În acest fel se pune în evidenţă modul în care depind curenţii şi tensiunile unui circuit de parametrii reţelei.

Teorema liniarităţii afirmă că dacă un circuit electric conţine rezistoare liniare, surse comandate liniar şi un singur generator independent, atunci toate tensiunile şi curenţii reţelei vor depinde liniar de parametrul generatorului.

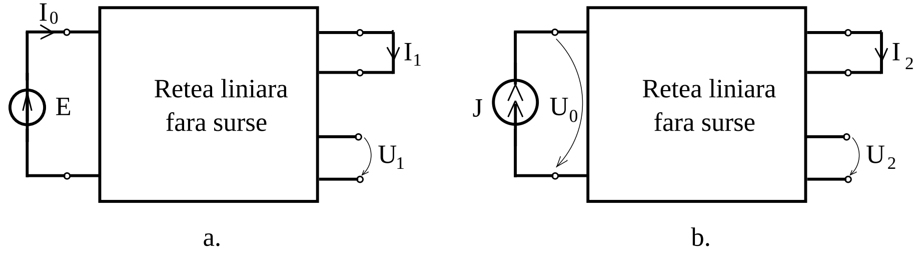


Fig. 2.27.

Utilizând notaţiile din figura 2.27, teorema liniarităţii are forma:

$$\begin{aligned} I_1 &= G_t \cdot E; \qquad & I_2 &= A_i \cdot J; \\ U_1 &= A_u \cdot E; \qquad & U_2 &= R_t \cdot J, \end{aligned} \tag{2.67}$$

în care s-au pus în evidenţă coeficienţii de proporţionalitate G_t (conductanţa de transfer), A_u (coeficientul de transfer al tensiunii), A_i (coeficientul de transfer al curentului) şi R_t (rezistenţa de transfer). Cei patru coeficienţi de transfer, numiţi şi transmitanţe, sunt parametrii caracteristici ai reţelei faţă de cele două porţi, nedepinzând de mărimile de excitaţie E sau J.

Teorema răspunsurilor maxime afirmă că pentru circuitele ce conţin numai rezistoare cu rezistenţe pozitive, coeficienţii de transfer în tensiune sau curent au modulul subunitar:

$$|A_u| \leq 1 \quad ; \quad |A_i| \leq 1, \tag{2.68}$$

deci tensiunile unui circuit rezistiv alimentat de la o singură sursă nu depăşesc tensiunea de alimentare: $|U_1| \leq |E|$ iar curenţii nu depăşesc curenţii de alimentare $|I_2| \leq |J|$.

Aplicând teorema substituţiei (paragraful 3.5) rezultă următoarea consecinţă a teoremei anterioare:

$$\begin{aligned} |I_1| \leq |I_0| = |G_i E| &\implies |G_t| \leq G_i; \\ |U_2| \leq |U_0| = |R_i J| &\implies |R_t| \leq R_i, \end{aligned} \tag{2.69}$$

în care s-a notat cu $R_i = 1/G_i$ rezistenţa echivalentă a circuitului rezistiv faţă de intrare şi cu G_t, R_t conductanţa, respectiv rezistenţa de transfer intrare - ieşire.

Teorema reciprocităţii afirmă că pentru un circuit ce conţine numai rezistoare, sunt valabile egalităţile:

$$\begin{aligned} I_a &= I_b; \\ U_a &= U_b, \end{aligned} \tag{2.70}$$

pentru mărimile definite în figura 2.28.

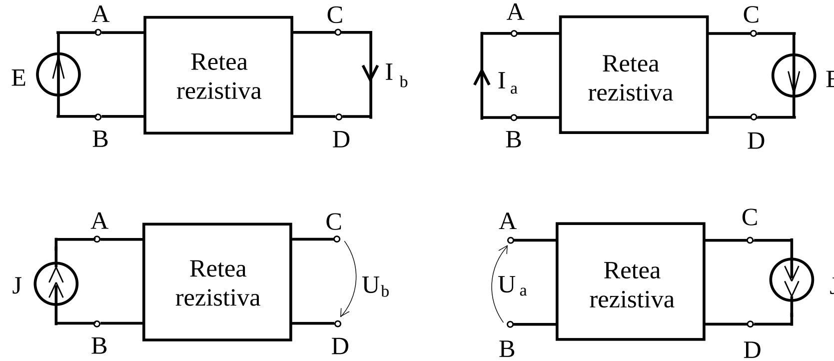


Fig. 2.28.

O consecinţă a teoremei reciprocităţii este faptul că pentru o reţea rezistivă coeficienţii de transfer pentru două porţi 1 şi 2 sunt egali:

$$G_{t_{12}} = G_{t_{21}} \ ; \ R_{t_{12}} = R_{t_{21}}. \tag{2.71}$$

Teorema superpoziţiei afirmă că dacă un circuit conţine rezistoare liniare, surse comandate liniar şi generatoare independente, atunci curentul şi tensiunea unei laturi sunt suma curenţilor, respectiv a tensiunilor din latura respectivă produse de fiecare generator, în condiţiile în care celelalte generatoare sunt pasivizate.

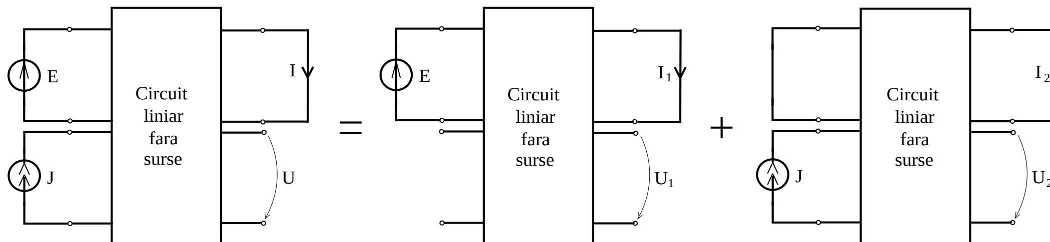


Fig. 2.29.

Utilizând notaţiile din figura 2.29, din teorema superpoziţiei rezultă:

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2; \\ U &= U_1 + U_2. \end{aligned} \tag{2.72}$$

În general, pentru un circuit ce conţine n surse, curentul I_k din latura k şi tensiunea U_k la bornele laturii k satisfac egalităţile:

$$\begin{aligned} I_k &= \sum_{i=1}^{n} I_{ki}\ ; \\ U_k &= \sum_{i=1}^{n} U_{ki}\ , \end{aligned} \tag{2.73}$$

în care I_{ki} şi U_{ki} sunt curentul, respectiv tensiunea din latura k, în condiţiile în care în circuit se află doar generatorul independent din latura i, toate celelalte fiind pasivizate.

Dacă un circuit liniar este excitat de generatoare de tensiune (fig. 2.30.a), atunci curenţii absorbiţi de porţi sunt, conform teoremelor liniarităţii şi superpoziţiei, de forma:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \cdots & G_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix}, \tag{2.74}$$

în care $[G_{ij}]$ este *matricea conductanţelor*, elementele diagonale reprezentând conductanţele echivalente de intrare ale porţilor, iar cele nediagonale reprezentând conductanţei de transfer:

$$G_{ij} = \left.\frac{I_i}{E_j}\right|_{E_k=0,\ k\neq j}. \tag{2.75}$$

Dacă circuitul liniar este reciproc atunci relaţia (2.71) garantează simetria matricei G.

Dacă circuitul liniar este excitat de m generatoare de curent (fig. 2.30.b), atunci tensiunile la bornele porţilor satisfac relaţia:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \cdots & R_{mm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_m \end{bmatrix}, \tag{2.76}$$

în care $[R_{ij}]$ este *matricea rezistenţelor de transfer, cu elementele:*

$$R_{ij} = \left.\frac{U_i}{J_j}\right|_{J_k=0,\ k\neq j}. \tag{2.77}$$

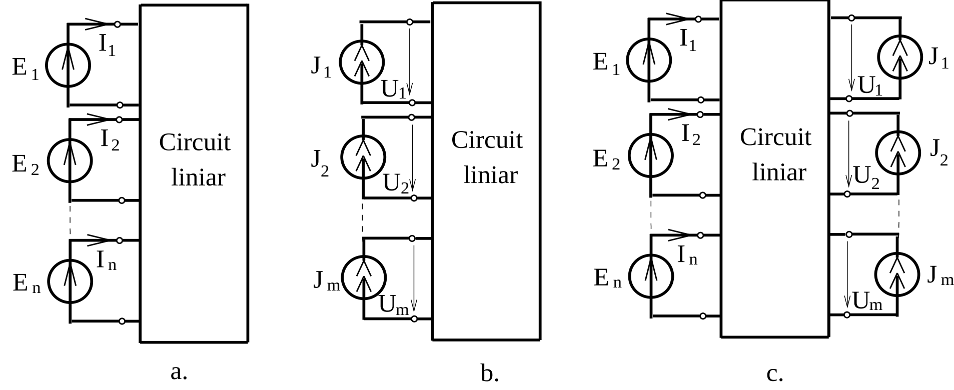


Fig. 2.30.

Această matrice este simetrică în cazul circuitelor reciproce.

Dacă un circuit liniar este excitat de n generatoare de tensiune şi m generatoare de curent, atunci mărimile necunoscute ale porţilor satisfac relaţia:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & \vdots & H_{12} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ H_{21} & \vdots & H_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \\ J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_m \end{bmatrix}, \tag{2.78}$$

în care matricea H se numeşte *matrice hibridă a multiportului* fiind alcătuită din *conductanţe de transfer* (elementele din submatricea bloc H_{11}), definite prin:

$$h_{ij} = \left.\frac{I_i}{E_j}\right|_{\substack{E_k=0;\ k\neq j \\ J_k=0;\ k=\overline{1,m}}}, \tag{2.79}$$

coeficienţii de transfer în curent (elementele din submatricea bloc H_{12}), definiţi de:

$$h_{ij} = \left.\frac{I_i}{J_j}\right|_{\substack{J_k=0;\ k\neq j \\ E_k=0;\ k=\overline{1,n}}}, \tag{2.80}$$

coeficienţii de transfer în tensiune (elementele din submatricea H_{21}), definiţi de:

$$h_{ij} = \left.\frac{U_i}{E_j}\right|_{\substack{E_k=0;\ k\neq j \\ J_k=0;\ k=\overline{1,m}}}, \tag{2.81}$$

rezistenţele de transfer (submatricea H_{22}):

$$h_{ij} = \left.\frac{U_i}{J_j}\right|_{\substack{J_k=0;\ k\neq j\\ E_k=0;\ k=\overline{1,n}}} . \tag{2.82}$$

În consecinţă, pentru caracterizarea unui multiport liniar cu n porţi se utilizează o matrice pătrată de transmitanţe, de dimensiune $n \times n$. Definirea acestei matrici depinde de modul în care sunt controlate porţile, în curent sau în tensiune. Între matricile caracteristice unui multiport se pot stabili diverse relaţii; de exemplu, dacă matricea conductanţelor G este inversabilă atunci matricea rezistenţelor este inversa sa:

$$R = G^{-1}. \tag{2.83}$$

În cazul reţelelor rezistive cu rezistenţe pozitive matricile R şi G sunt, conform teoremelor anterioare, matrici simetrice, pozitiv definite, cu diagonală dominantă.

Teoremele anterioare au pus în evidenţă modul în care variază curenţii şi tensiunile unei reţele în funcţie de surse. Modificarea valorii unei rezistenţe determină, în general, modificarea tuturor tensiunilor şi curenţilor din circuitul respectiv. Pentru evidenţierea modului în care se modifică tensiunile şi curenţii unei reţele faţă de modificarea unei rezistenţe este utilă următoarea teoremă.

Teorema variaţiei afirmă că derivatele parţiale ale curenţilor şi tensiunilor dintr-o latură a unei reţele faţă de o rezistenţă R sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial R} &= -G_t \cdot I_1; \\ \frac{\partial U}{\partial R} &= -A_u \cdot I_1, \end{aligned} \tag{2.84}$$

în care I_1 este curentul prin rezistorul supus variaţiei, iar G_t şi A_u sunt transmitanţele porţilor la care s-au definit mărimile I respectiv U faţă de o poartă controlată de tensiune înseriată cu rezistenţa R (fig. 2.31.a), în condiţiile în care reţeaua se presupune pasivizată.

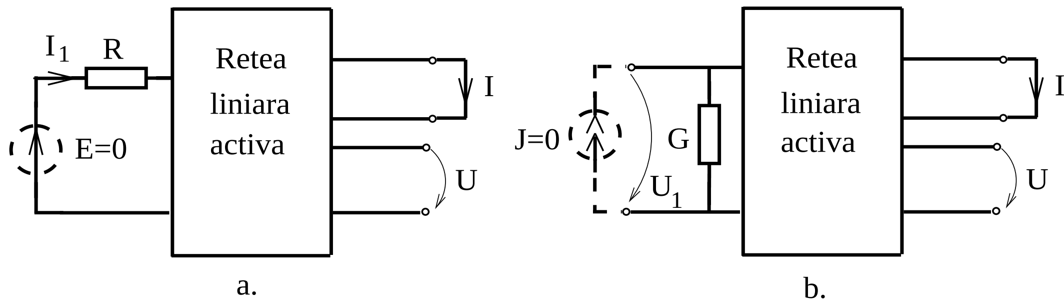


Fig. 2.31.

Derivatele curentului I şi a tensiunii U faţă de conductanţa G a unui rezistor din reţea sunt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial G} &= -A_i \cdot U_1; \\ \frac{\partial U}{\partial G} &= -R_t \cdot U_1, \end{aligned} \tag{2.85}$$

în care U_1 este tensiunea la bornele rezistorului supus variaţiei, iar A_i şi R_t sunt transmitanţele porţilor la care s-au definit mărimile I respectiv U faţă de o poartă controlată în curent, conectată în paralel cu rezistorul de conductanţă G, în condiţiile în care reţeaua se presupune pasivizată (fig. 2.31.b).

Utilizând relaţiile (2.84) şi (2.85) se poate stabili influenţa unei rezistenţe sau a unei conductanţe asupra unei transmitanţe, calculând derivata transmitanţei faţă de acea rezistenţă sau conductanţă. Deoarece orice transmitanţă $T = Y/X$ este raportul unei mărimi de ieşire Y şi al unei mărimi de intrare X, presupunând mărimea de intrare constantă, rezultă că derivata parţială a transmitanţei T este:

$$\frac{dT}{dR} = \frac{1}{X} \cdot \frac{dY}{dR},$$

exprimabilă în funcţie de derivata mărimii de ieşire, curent sau tensiune. Calculul derivatelor transmitanţelor faţă de rezistenţele şi conductanţele unui circuit poartă numele de *analiza senzitivităţilor* circuitului respectiv.

PROBLEME

2.7.1. Să se verifice teorema liniarităţii pentru circuitele din figura 2.7.1. Să se calculeze transmitanţele tuturor laturilor faţă de latura generator.

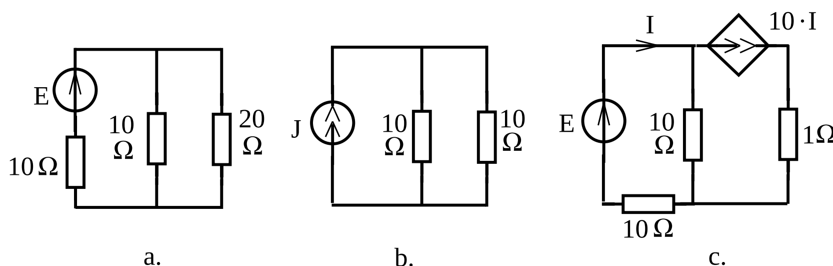


Fig. 2.7.1.

2.7.2. Să se verifice teorema reciprocităţii şi teorema răspunsurilor maxime pentru circuitele cuadripolare din figura 2.7.2.

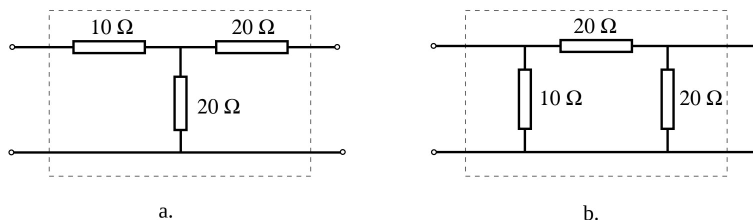


Fig. 2.7.2.

2.7.3. Să se calculeze curenţii notaţi cu I în circuitele din figura 2.7.3, aplicând teorema superpoziţiei.

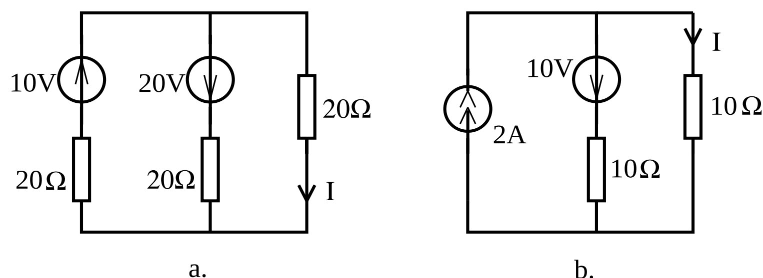


Fig. 2.7.3.

2.7.4. Să se calculeze, pentru cuadripolii diporţi din figura 2.7.4, matricile rezistenţă, conductanţă şi a parametrilor hibrizi. Să se discute condiţiile de existenţă a acestor matrici.

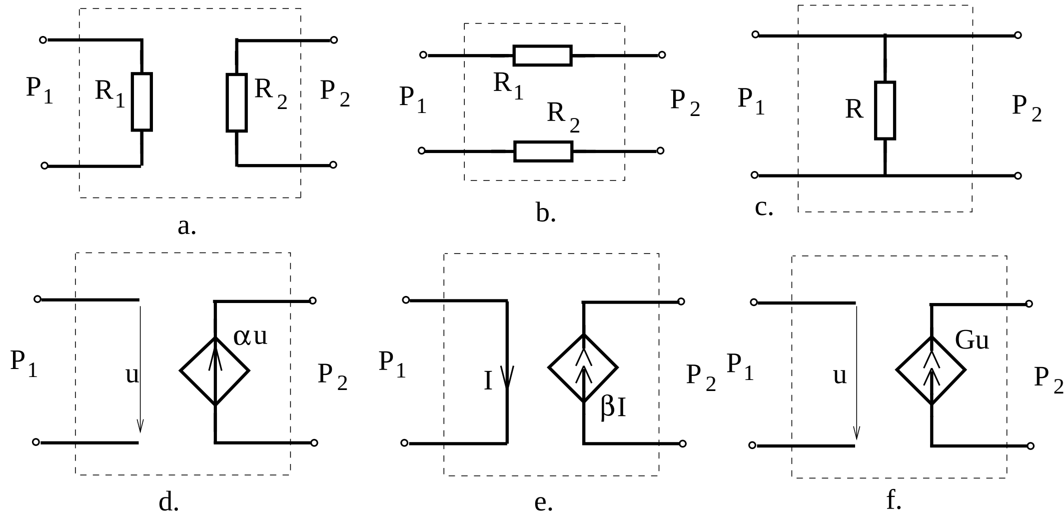


Fig. 2.7.4.

2.7.5. Să se calculeze matricile rezistenţă, conductanţă şi hibride pentru cuadripolii diporţi din figura 2.7.5. Să se stabilească condiţiile de echivalenţă între aceşti cuadripoli.

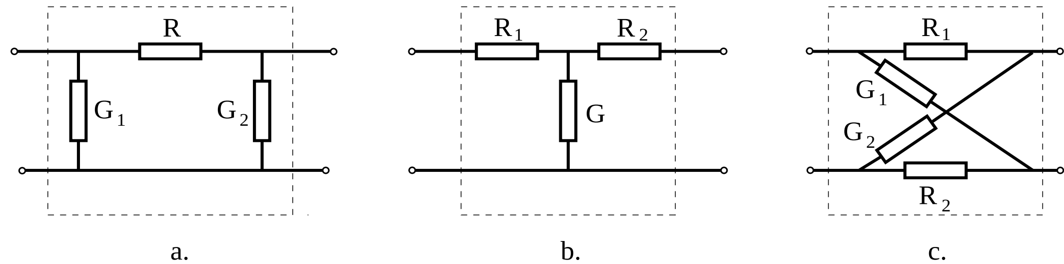


Fig. 2.7.5.

2.7.6. Să se calculeze matricile caracteristice ale cuadripolilor prezentaţi în figura 2.7.6. În ce condiţii aceşti cuadripoli sunt echivalenţi cu cei din figura 2.7.5 ?

2.7.7. Să se calculeze derivatele parţiale ale intensităţii I faţă de rezistenţele circuitului, la circuitele din figura 2.7.3. În ce sens trebuie modificate rezistenţele pentru a mări modulul curentului $|I|$?

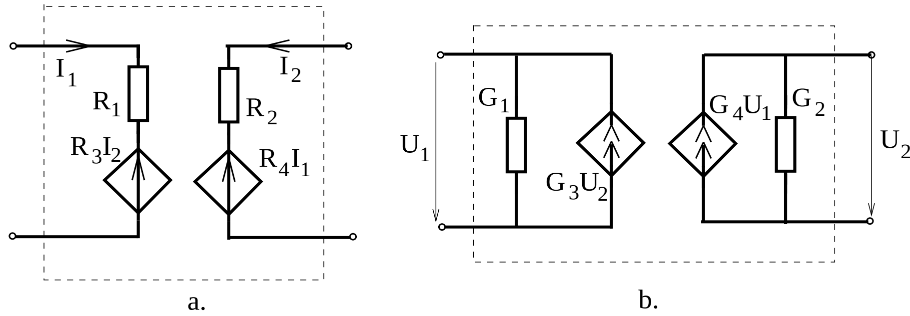


Fig. 2.7.6.

2.7.8. Să se calculeze derivatele parţiale ale transmitanţelor circuitelor din figura 2.7.5, faţă de rezistenţele şi conductanţele rezistoarelor ce alcătuiesc reţeaua.

2.7.9. Să se calculeze derivatele parţiale ale parametrilor calculaţi în problema 2.6.7. faţă de datele problemei. În ce sens trebuie modificate datele problemei pentru a mări modulul tensiunii u_2 ?

2.7.10. Să se determine cu câte procente trebuie modificată valoarea rezistenţei R_1 la circuitul din figura 2.6.5, pentru ca tensiunea u_2 să crească cu un procent.

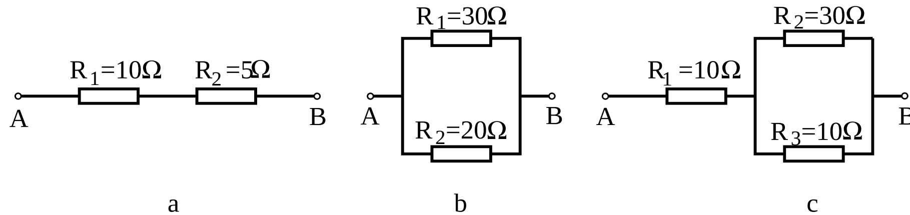


Fig. 2.7.7.

2.7.11. Să se studieze influenţa rezistenţelor asupra rezistenţei echivalente între bornele A, B în cazul circuitelor din figura 2.7.7. Presupunând satisfăcătoare aproximarea liniară să se determine cu câte procente se va modifica rezistenţa echivalentă, dacă fiecare rezistor îşi măreşte rezistenţa cu 1%.

Capitolul 3

Circuite electrice rezistive neliniare

3.1 Circuite liniare cu un dipol neliniar

BREVIAR

Pentru caracterizarea unui **rezistor dipolar neliniar controlat în curent** (fig. 3.1.a) se utilizează următoarele funcţii:

– *caracteristica curent-tensiune:*

$$u = f(i); \tag{3.1}$$

– *rezistenţa statică:*

$$R_s(i) = \frac{f(i)}{i}; \tag{3.2}$$

– *rezistenţa dinamică:*

$$R_d(i) = \frac{df}{di}, \tag{3.3}$$

ultima funcţie utilizându-se atunci când funcţia caracteristică f este derivabilă.

Pentru caracterizarea unui **rezistor neliniar controlat în tensiune** (fig. 3.1.b) se utilizează următoarele funcţii:

– *caracteristica tensiune-curent:*

$$i = g(u); \tag{3.4}$$

– *conductanţa statică:*

$$G_s(u) = \frac{g(u)}{u}; \tag{3.5}$$

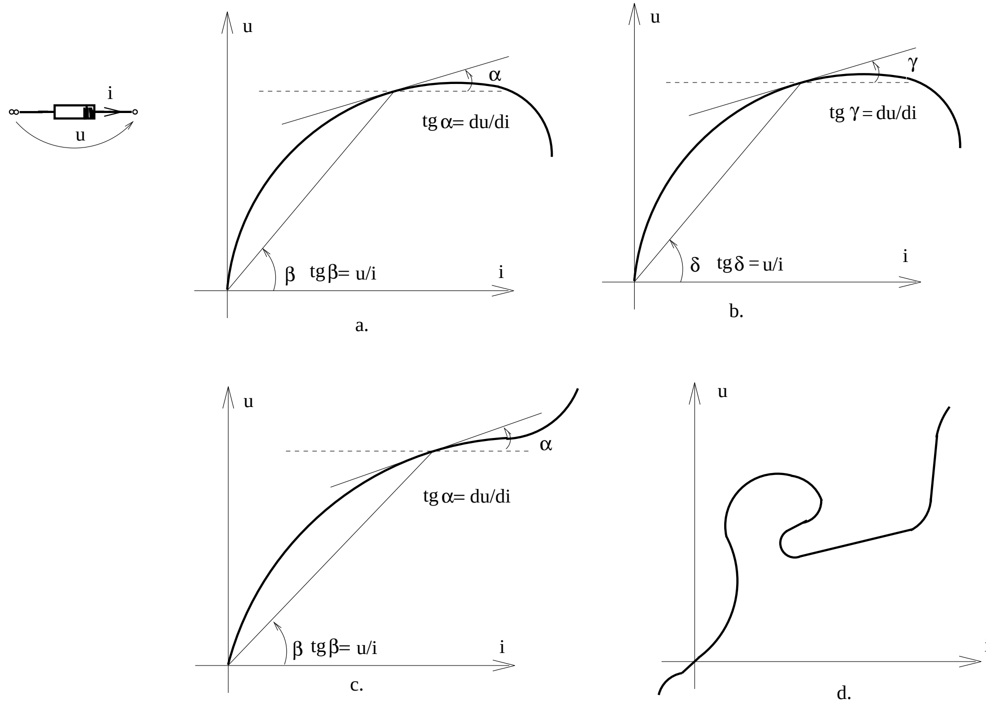


Fig. 3.1.

– *conductanţa dinamică:*

$$G_d(u) = \frac{dg}{du}, \tag{3.6}$$

ultima funcţie utilizându-se atunci când funcţia caracteristică g este derivabilă.

În cazul elementelor ce au caracteristica f inversabilă (fig. 3.1.c) se pot utiliza toate cele patru funcţii, elementele putând fi controlate atât în curent cât şi în tensiune. Elementele ce nu sunt controlate în curent sau în tensiune (fig. 3.1.d) necesită două funcţii pentru a reprezenta relaţia u-i sub formă parametrică:

$$\begin{aligned} u &= f(\lambda); \\ i &= g(\lambda). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Un rezistor care are funcţia caracteristică impară:

$$f(-i) = -f(-i) \quad sau \quad g(-i) = -g(u), \tag{3.8}$$

se numeşte cu bornele nepolarizate, în caz contrar el face parte din categoria elementelor polarizate.

În general, schimbarea sensurilor de referinţă pentru tensiuni şi curenţi determină modificarea graficului relaţiei u-i, din acest motiv graficul unei caracteristici u-i trebuie asociat unei figuri cu sensuri de referinţă pentru tensiuni şi curenţi. La

elementele nepolarizate este suficient să se specifice regula de asociere a sensurilor pentru a interpreta graficul în mod univoc.

Rezistoarele liniare având ecuaţia de funcţionare:

$$u = Ri,$$

pot fi controlate fie în curent (dacă $G = 1/R \neq 0$), fie în tensiune (dacă $R \neq 0$), iar $R_S = R_d = R = 1/G_d = 1/G_s$. Rezistoarele liniare fac parte din categoria rezistoarelor nepolarizate.

Cea mai simplă metodă pentru analiza circuitelor liniare ce conţin un rezistor neliniar este metoda grafică a **dreptei de sarcină**. Pentru aplicarea acestei metode se determină generatorul echivalent părţii liniare a reţelei (fig. 3.2.b) şi se reprezintă grafic relaţia dintre tensiune şi curent impusă de acest generator. Graficul acestei funcţii va fi o dreaptă, numită dreaptă de sarcină, iar soluţia problemei, punctul de operare al elementului neliniar este punctul de coordonate *(i,u)*, aflat la intersecţia acestei drepte cu caracteristica neliniară. Pentru trasarea dreptei sunt suficiente două puncte şi anume tensiunea de mers în gol U_{AB_0} şi curentul de scurtcircuit $I_{sc_{AB}}$. În consecinţă, analiza se reduce la înlocuirea elementului neliniar cu un izolator, respectiv cu un conductor perfect, determinându-se tăieturile dreptei de sarcină.

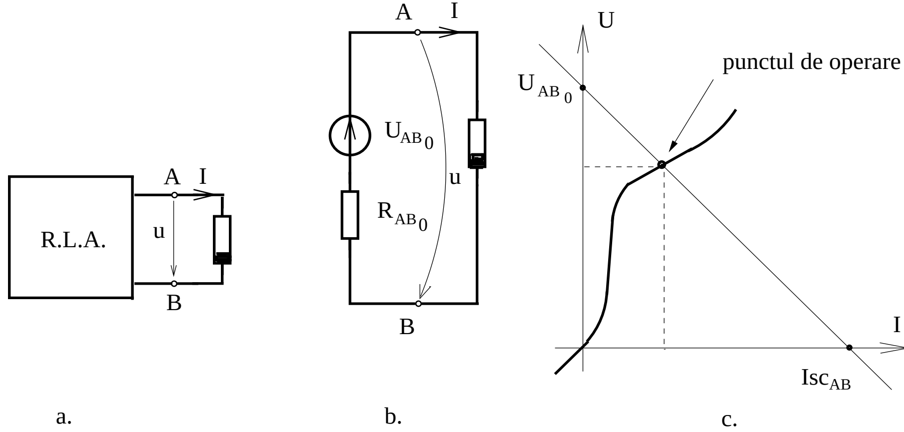


Fig. 3.2.

Dezavantajele metodei dreptei de sarcină constau în imprecizia implicită a unei metode grafice şi în faptul că metoda poate fi aplicată doar la circuite cu un singur element neliniar. Metoda poate fi extinsă la circuite ce conţin mai multe elemente neliniare conectate în serie sau în paralel, ce alcătuiesc un dipol echivalent neliniar. Dacă elementele neliniare sunt conectate în serie ($i_1 = i_2, u = u_1 + u_2$), atunci caracteristica elementului echivalent se determină prin sumare grafică pe orizontală, în planul u-i ca în figura 3.3.

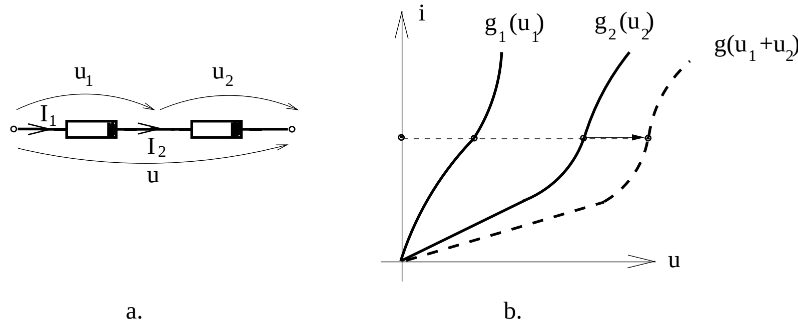


Fig. 3.3.

Dacă elementele neliniare sunt conectate în paralel, $(u_1 = u_2, i = i_1 + i_2)$, atunci caracteristica elementului echivalent se determină prin sumare grafică pe verticală, în planul u-i, ca în figura 3.4.

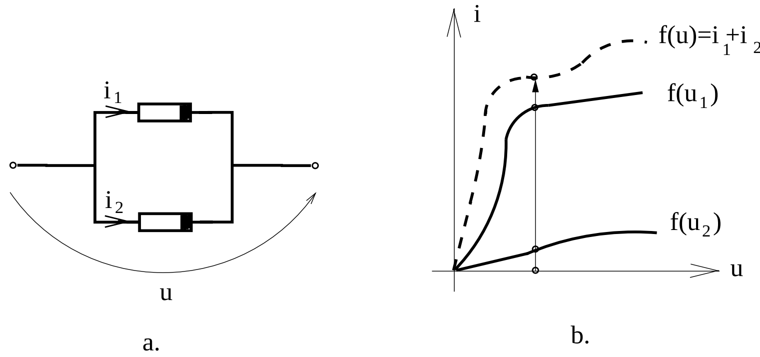


Fig. 3.4.

Conectarea în serie a unui generator ideal de tensiune cu un rezistor neliniar translatează caracteristica neliniară a acestuia cu tensiunea electromotoare E (fig. 3.5).

Conectarea în paralel a unui generator ideal de curent cu un rezistor neliniar translatează caracteristica neliniară a acestuia cu curentul electromotor J (fig. 3.6).

Observaţiile anterioare permit să se afirme că orice rezistor neliniar este echivalent cu un generator neliniar de tensiune (fig. 3.5.a) sau cu un generator neliniar de curent (fig. 3.6.a). Această observaţie permite generalizarea metodei grafice la circuite alcătuite din elemente neliniare conectate serie-paralel obţinându-se metoda numită a **curbei de sarcină**, în care punctul de operare *[u,i]* al unui element neliniar se obţine prin intersecţia caracteristicii elementului cu curba de sarcină a restului reţelei neliniare determinată prin însumări grafice.

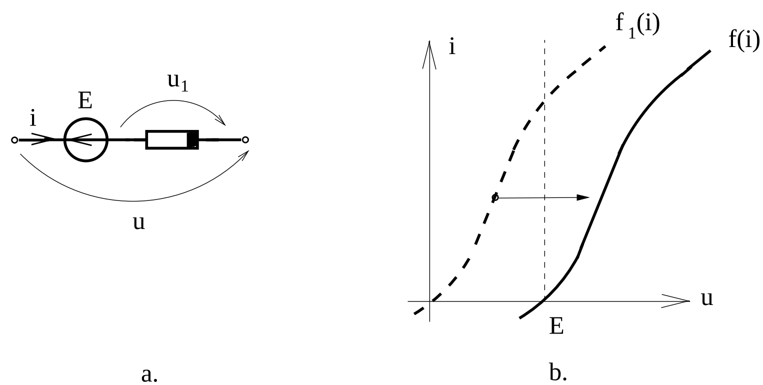


Fig. 3.5.

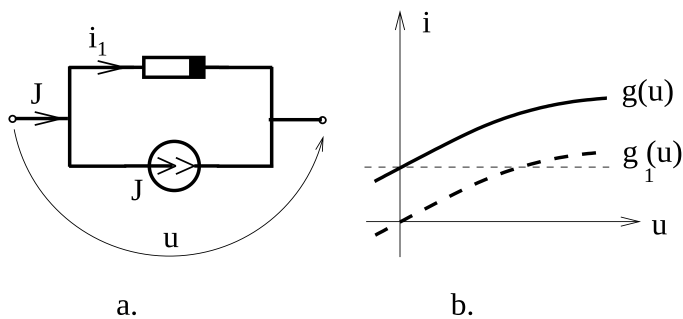


Fig. 3.6.

PROBLEME

3.1.1. Să se reprezinte grafic caracteristicile $i(u)$, rezistenţa statică $R_s(u)$ şi rezistenţa dinamică $R_d(u)$ pentru o diodă semiconductoare (fig. 3.1.1) pentru care s-au măsurat următoarele perechi de valori U-I.

U[V]	-40	-30	-20	-10	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
I[mA]	-0,1	-0,06	-0,04	-0,02	0	1	3	6	9	12

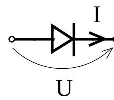


Fig. 3.1.1.

3.1.2. Să se calculeze rezistenţa statică şi dinamică pentru tensiunile $u_1 = 1$V şi $u_2 = -1$V aplicate la bornele unei diode având funcţia caracteristică:

$$i = g(u) = I_s(e^{u/U_t} - 1),$$

în care I_s=0,05mA şi $U_T = 25$mV.

3.1.3. Să se calculeze rezistenţa dinamică pe diferite porţiuni ale caracteristicilor neliniare reprezentate în figura 3.1.2: (a) dioda semiconductoare; (b) dioda Zener; (c) dioda tunel; (d) dioda tiristor; (e) tubul cu neon şi (f) varistorul.

3.1.4. Să se reprezinte grafic caracteristica u-i pentru dioda semiconductoare alegând pe rând sensurile de referinţă din figura 3.1.3. Să se reprezinte, în mod asemănător, graficele tuturor celorlalte elemente neliniare din figura 3.1.2, pentru diferite sensuri de referinţă.

3.1.5. Să se reprezinte caracteristica u-i pentru elementele dipolare reprezentate în figura 3.1.4. Se va înlocui dioda semiconductoare cu celelalte elemente neliniare din figura 3.1.2.

3.1.6. Să se reprezinte grafic caracteristica u-i pentru elementele dipolare din figura 3.1.5. Se va studia apoi combinaţia altor elemente neliniare din cele prezentate în figura 3.1.2.

3.1.7. Să se reprezinte grafic caracteristica u-i pentru diferite combinaţii de elemente dipolare neliniare conectate în serie sau paralel (fig. 3.1.6).

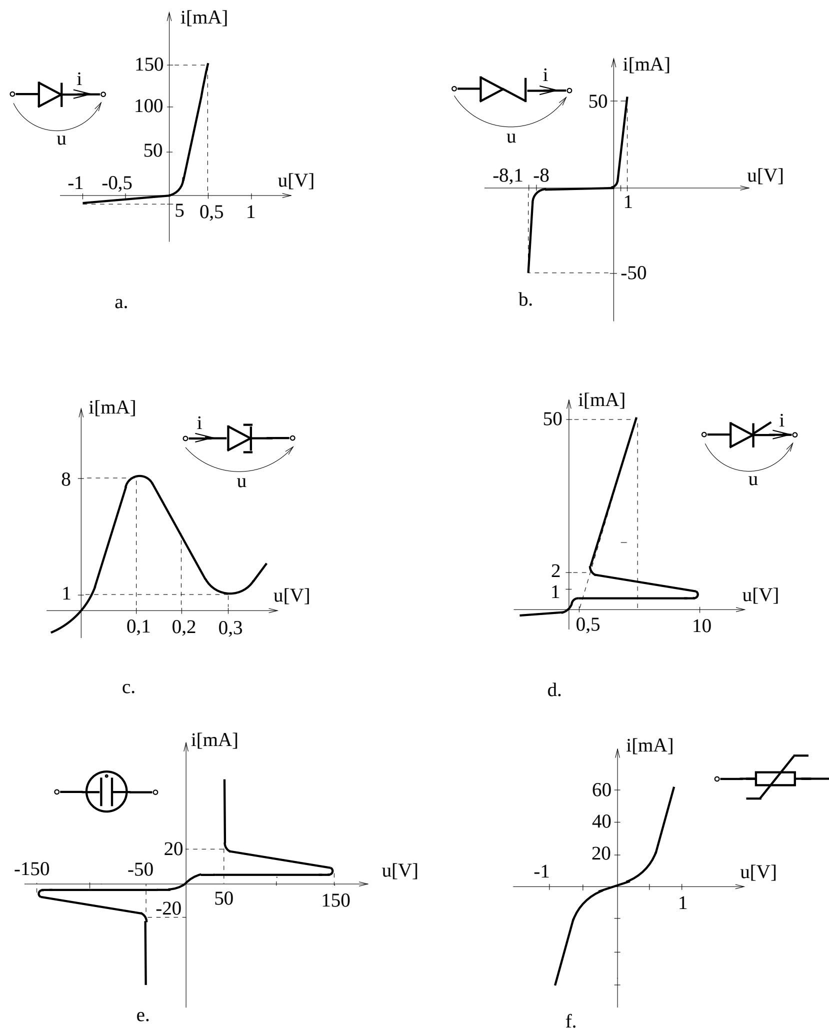


Fig. 3.1.2.

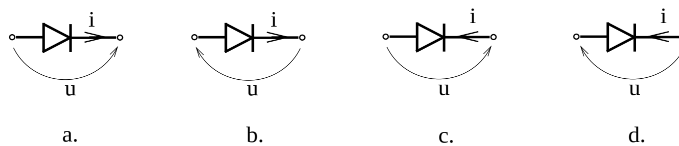


Fig. 3.1.3.

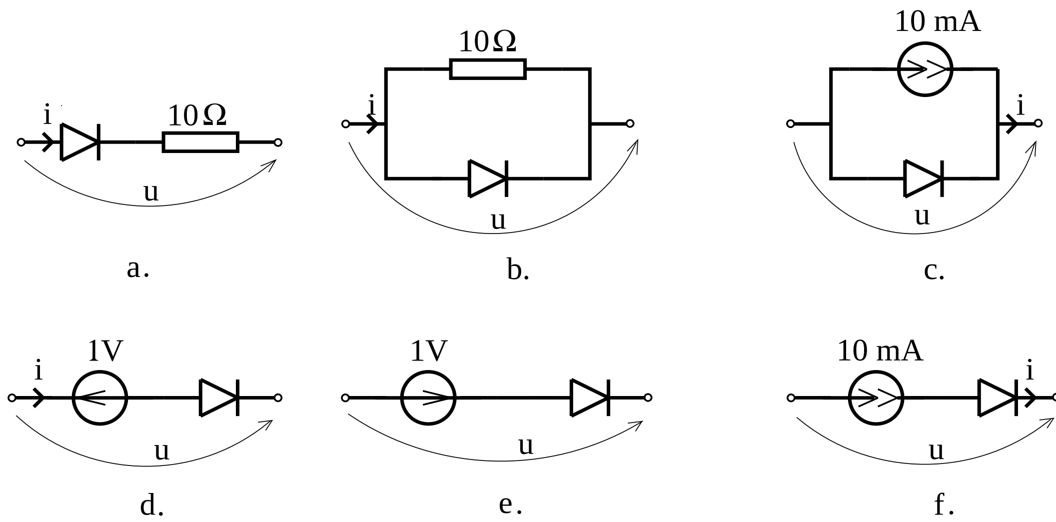


Fig. 3.1.4.

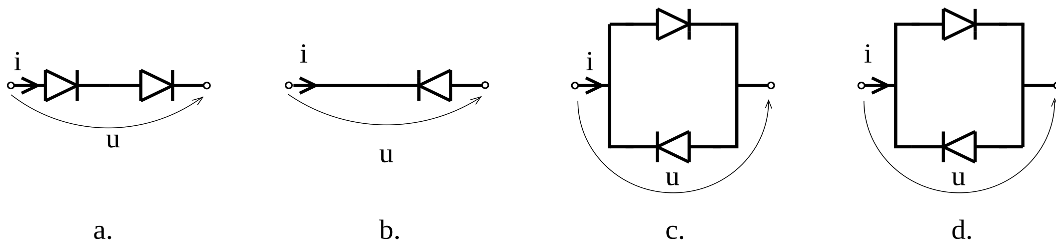


Fig. 3.1.5.

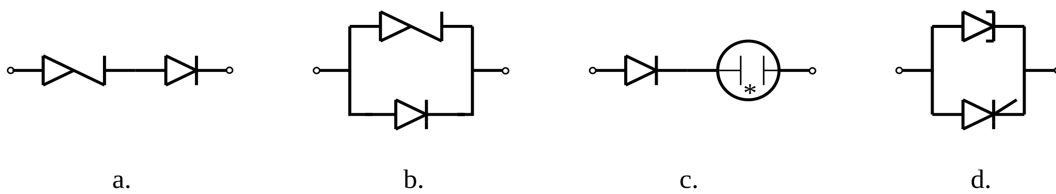


Fig. 3.1.6.

3.1.8. Să se determine coordonatele punctului de operare *[u,i]* pentru elementul neliniar din circuitul reprezentat în figura 3.1.7. Se vor considera pe rând elementele neliniare ale căror caracteristici sunt prezentate în figura 3.1.2. Ce efect are asupra punctului de operare inversarea poziţiei elementului neliniar? Este acest efect echivalent inversării poziţiei generatorului?

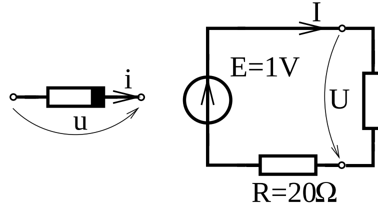


Fig. 3.1.7.

3.1.9. Să se determine porţiunea din caracteristica neliniară pe care se află punctul de operare al elementului neliniar *[u,i]*, în cazul circuitelor reprezentate în figura 3.1.8. Se vor considera, pe rând, elementele neliniare ale căror caracteristici sunt prezentate în figura 3.1.2.

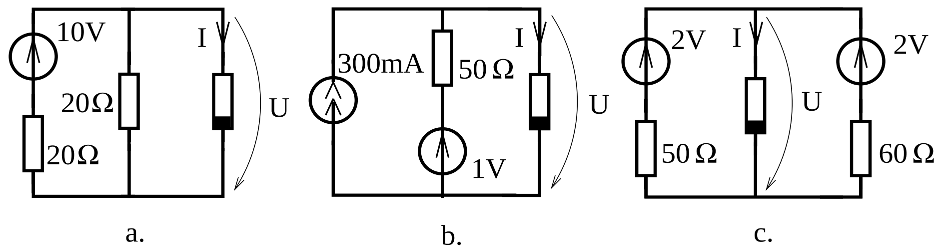


Fig. 3.1.8.

3.1.10. Să se determine numărul de soluţii pe care le poate avea problema determinării punctului de operare în cazul circuitului reprezentat în figura 3.1.9.

H **3.1.11.** Ce rezistenţă trebuie conectată în paralel cu dioda tunel a cărei caracteristică este prezentată în figura 3.1.2.c, pentru ca elementul obţinut să poată fi utilizat ca stabilizator de curent?

3.1.12. Să se analizeze circuitele reprezentate în figura 3.1.10 şi să se determine punctele de operare pentru elementele neliniare. Vor fi considerate caracteristicile elementelor neliniare reprezentate în figura 3.1.2.

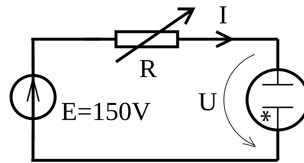


Fig. 3.1.9.

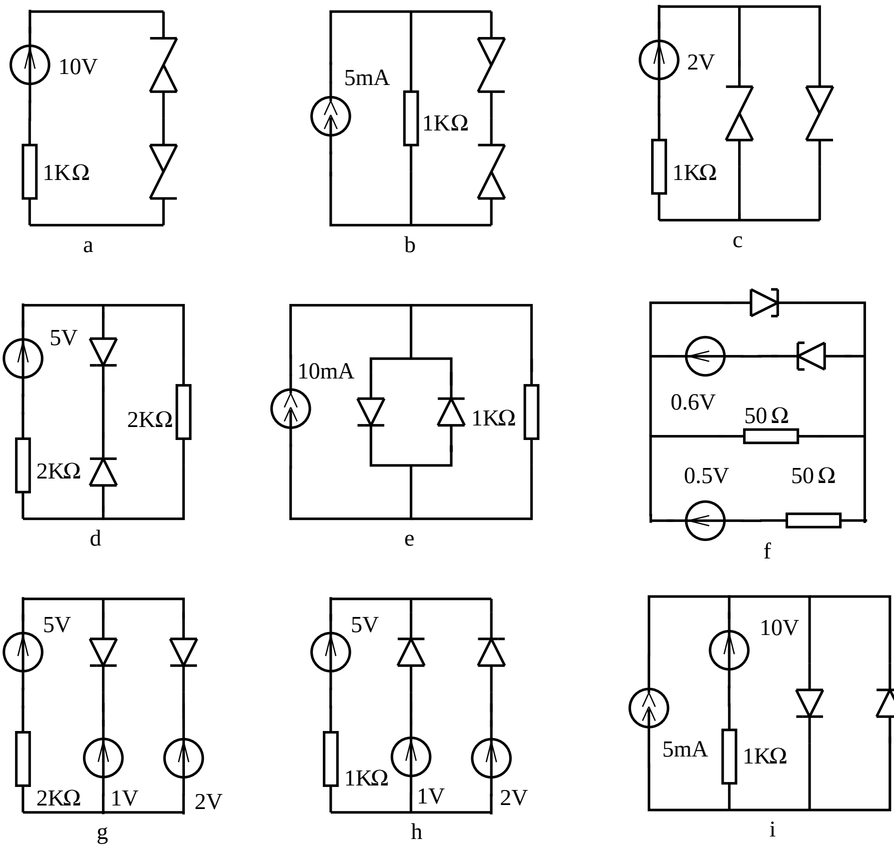


Fig. 3.1.10.

3.1.13. Aplicând metoda curbei de sarcină să se determine valorile tensiunii U şi curentului I pentru circuitele din figura 3.1.11. Se vor considera caracteristicile elementelor neliniare reprezentate în figura 3.1.2.

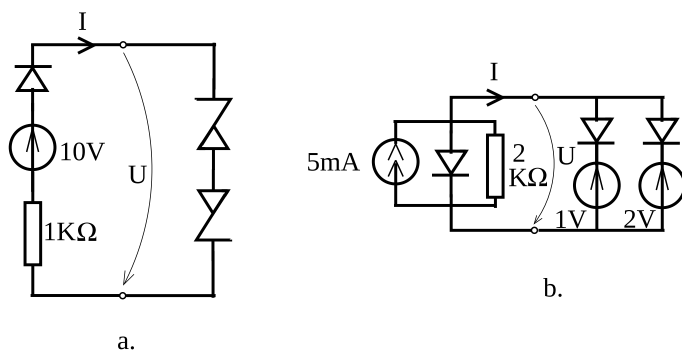


Fig. 3.1.11.

3.1.14. Să se urmărească traiectoria punctului de operare şi să se reprezinte grafic variaţia tensiunii $u(t)$ dacă tensiunea electromotoare variază sinusoidal în timp $e(t) = 20\sin(\omega t)$ (fig. 3.1.12).

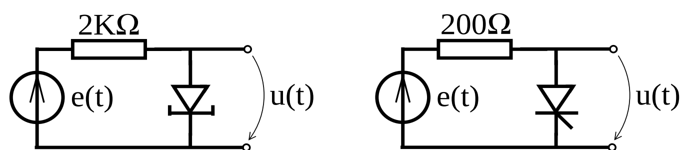


Fig. 3.1.12.

3.2 Elemente cu caracteristici liniare pe porţiuni

BREVIAR

Metoda dreptei de sarcină şi în general orice metodă grafică are dezavantajul principal de imprecizie în obţinerea soluţiei, imprecizie condiţionată de calitatea reprezentării grafice. Pentru a evita acest lucru, în analiza circuitelor neliniare se preferă aproximarea caracteristicii neliniare printr-o caracteristică de tip linie poligonală, alcătuită din segmente de dreaptă pe porţiuni (fig. 3.7). Pe fiecare porţiune, caracteristica u-i fiind o dreaptă, elementul neliniar poate fi echivalat cu un generator real, valabil pe porţiunea respectivă.

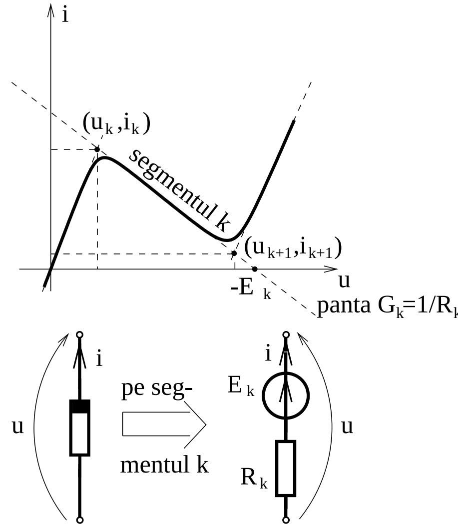


Fig. 3.7.

Generatorul echivalent corespunzător segmentului de dreptă ce are extremităţile (u_k, i_k) şi (u_{k+1}, i_{k+1}) are parametrii:

$$R_k = R_{dk} = \frac{u_{k+1} - u_k}{i_{k+1} - i_k}; \qquad E_k = R_k i_k - u_k, \tag{3.9}$$

în care R_k este panta dreptei (rezistenţa dinamică), iar E_k este intersecţia dreptei cu axa tensiunii.

Pentru analiza circuitelor ce conţin elemente neliniare cu caracteristici liniare pe porţiuni trebuie identificată, pentru fiecare element neliniar, porţiunea în care se află punctul de operare şi apoi înlocuindu-se schema liniară echivalentă pe porţiunea respectivă se analizează circuitul obţinut cu una din metodele de

analiză a circuitelor liniare. Pentru identificarea porţiunii în care se află punctul de operare se pot utiliza metode grafice ca metoda dreptei sau curbei de sarcină.

O altă metodă de analiză a acestor circuite neliniare ce nu utilizează tehnici grafice este aceea în care se analizează toate circuitele liniare obţinute prin combinarea schemelor echivalente pe porţiunile liniare şi eliminarea soluţiilor ce corespund punctelor de operare ce nu aparţin segmentelor pe care sunt valabile schemele utilizate.

Dacă se analizează un circuit ce conţine n elemente neliniare, fiecare element $k = 1...n$ având caracteristica alcătuită din m_k segmente de dreaptă, atunci cu această metodă, în cazul cel mai defavorabil, trebuie analizate $\prod_{k=1}^{n} m_k$ circuite liniare pentru a determina soluţia.

Prin aproximarea liniară pe porţiuni se obţin diferite *modele liniarizate* (de semnal mare) ale elementelor neliniare. De exemplu, pentru diode semiconductoare se pot utiliza modelele din figura 3.8.

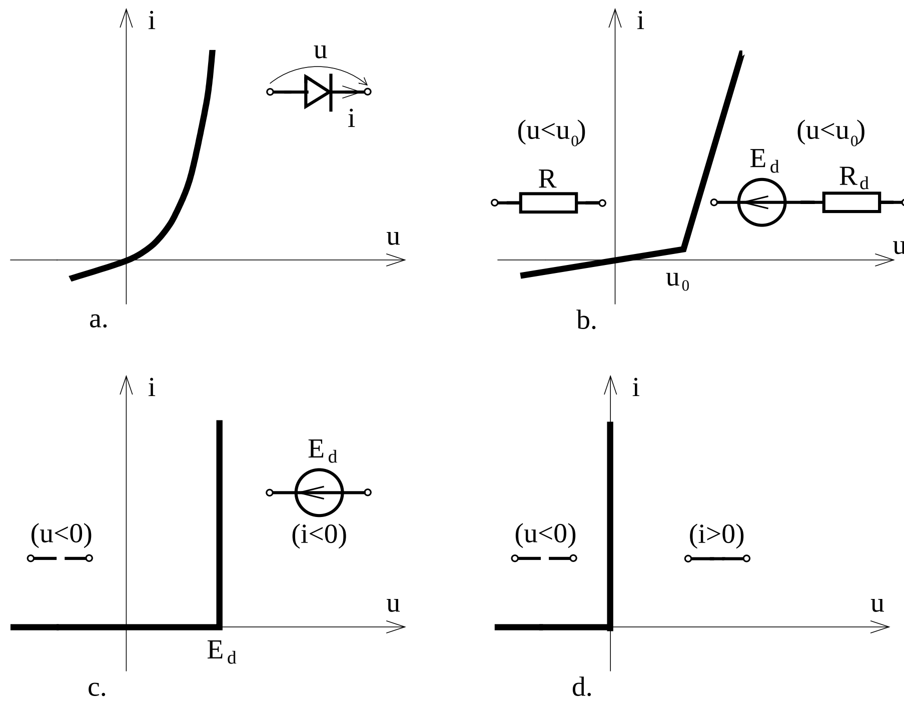


Fig. 3.8.

În **cazul elementelor tripolare** schemele echivalente liniarizate vor conţine şi generatoare comandate. De exemplu, **tranzistorul npn**, un element tripolar (cu cele trei terminale numite B - bază, E - emitor, C - colector), are caracteristicile statice:

$$U_{BE} = \hat{U}_{BE}(I_B, U_{CE}); \qquad I_C = \hat{I}_C(I_B, U_{CE}), \tag{3.10}$$

în care funcţiile neliniare de două variabile $\hat{U}_{BE}$, $\hat{I}_C$ sunt reprezentate grafic în figura 3.9. S-a considerat că mărimile de comandă (de intrare) sunt: curentul de bază I_B şi tensiunea colector - emitor U_{CE}, iar mărimile comandate (de ieşire) sunt: tensiunea bază - emitor U_{BE} şi curentul de colector I_C. Deoarece terminalul E este comun intrării se spune că această alegere corespunde *conexiunii cu emitor comun*, poarta de intrare (BE) fiind controlată în curent, iar cea de ieşire (CE) fiind controlată în tensiune. Dacă se aproximează cele două funcţii reţinând primii termeni din seria Taylor rezultă:

$$\begin{aligned} U_{BE} &\simeq H_{11} I_B + H_{12} U_{CE} + U_{BE_0}; \\ I_C &\simeq H_{21} I_B + H_{22} U_{CE} + I_{CE_0}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

în care coeficienţii H_{ij} sunt *parametrii hibrizi de semnal mare* ai tranzistorului şi au următoarele semnificaţii:

$H_{11} = R_B$ este rezistenţa directă a joncţiunii bază-emitor;
$H_{12} = K_E$ este coeficientul invers de transfer al tensiunii;
$H_{21} = \beta$ este coeficientul de amplificare în curent;
$H_{22} = 1/R_C$ este conductanţa colector-emitor în regiunea activă normală;
U_{BE_0} este tensiunea de deschidere a joncţiunii bază-emitor;
I_{CE_0} este curentul colector-emitor pentru un curent de bază nul.

Parametrii ce intervin în ecuaţiile (3.11) variază relativ puţin dacă tranzistorul se află în *regiunea activă normală* (R.A.N.). Dacă tranzistorul funcţionează în *regiunea de saturaţie* (fig. 3.9.c), atunci ecuaţiile pot fi aproximate prin:

$$I_C = \frac{U_{CE}}{R_\alpha}, \tag{3.12}$$

iar dacă funcţionează în *regiunea de blocare*: $I_C = 0$, $I_B = 0$.

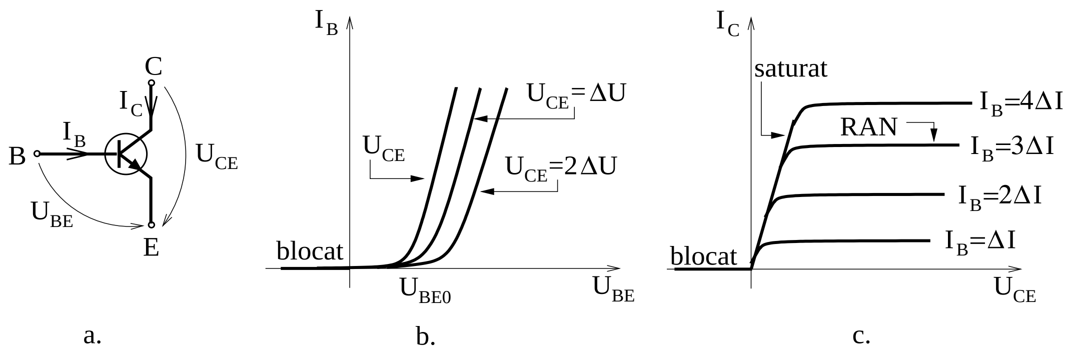


Fig. 3.9.

Aproximarea liniară pe porţiuni a ecuaţiilor tranzistorului este prezentată în figura 3.10.

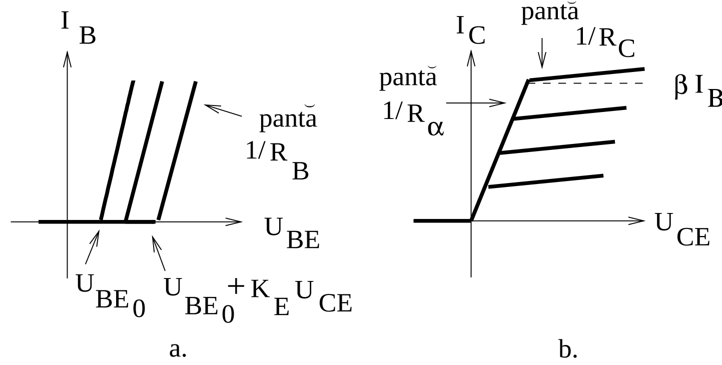


Fig. 3.10.

Pentru joncţiunea bază-emitor caracteristica se aproximează cu două segmente de dreaptă: baza blocată ($I_B = 0$) şi baza în conducţie ($I_B > 0$), iar caracteristica colector-emitor este aproximată prin trei segmente de dreaptă: tranzistorul blocat ($I_B = 0$), tranzistorul saturat ($I_B > 0$, $I_C < \beta I_B$) şi tranzistorul în regiunea activă normală ($I_B > 0$, $I_C > \beta I_B$). Schemele echivalente de semnal mare valabile pentru diferite regiuni, corespunzătoare acestor ecuaţii sunt prezentate în figura 3.12:

a) tranzistorul blocat ($U_B < 0$);

b) tranzistorul blocat cu baza în conducţie ($U_{CE} < 0$, $I_B > 0$);

c) tranzistorul saturat ($U_{CE} > 0$, $I_B > \dfrac{I_C}{\beta}$);

d) tranzistorul în regiunea activă normală ($U_{CE} > 0$, $0 < I_B < \dfrac{I_C}{\beta}$).

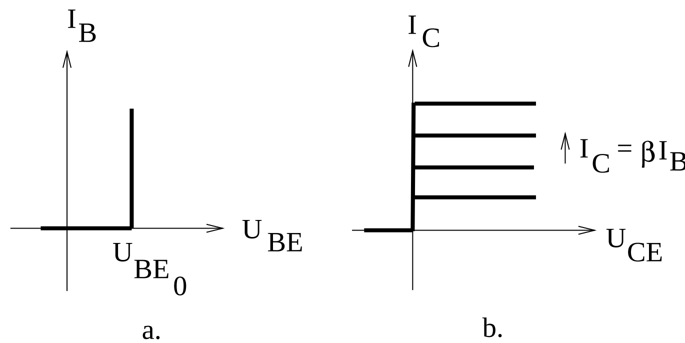


Fig. 3.11.

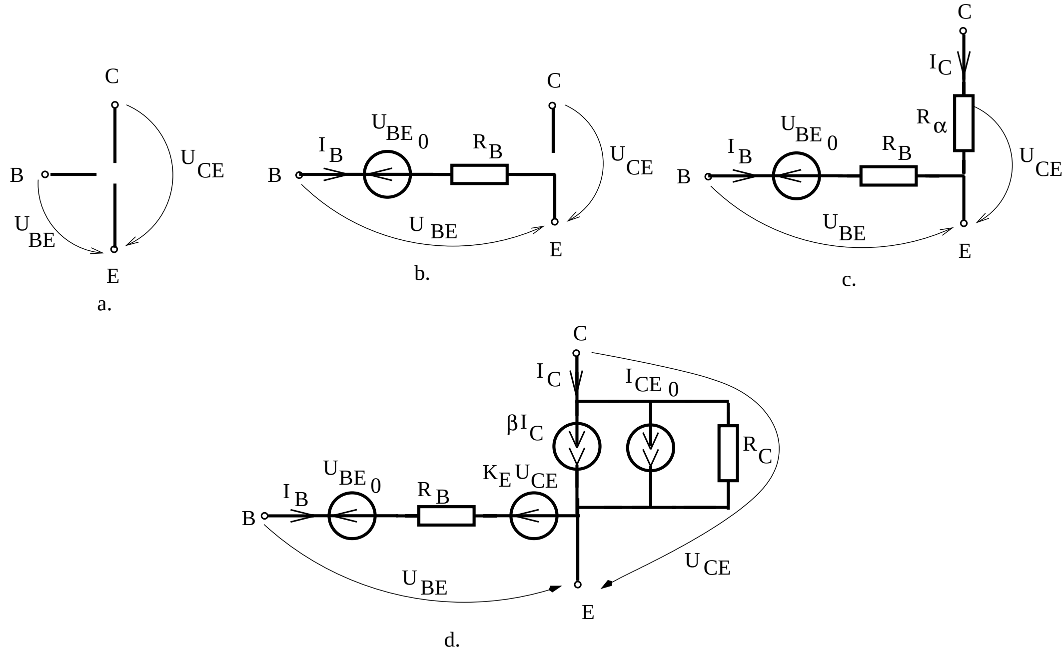


Fig. 3.12.

Dacă se adoptă următoarele aproximări: $R_B = 0$, $K_E = 0$, $R_\alpha = 0$, $R_C = \infty$, $I_{CE_0} = 0$, atunci se obţine *modelul liniar pe porţiuni simplificat* al tranzistorului prezentat în figura 3.11, cu schemele echivalente în cele patru regiuni prezentate în figura 3.13.

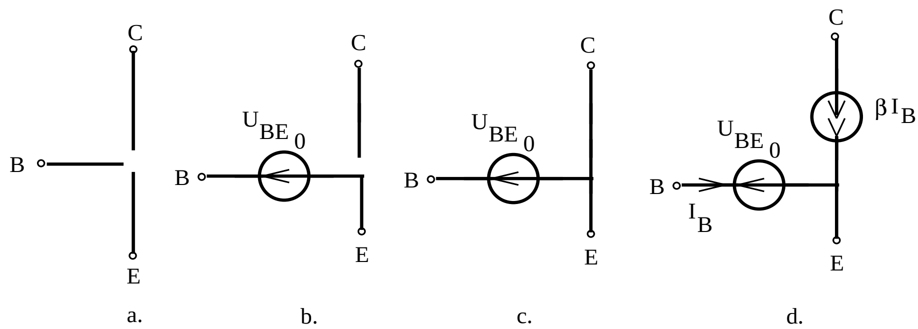


Fig. 3.13.

PROBLEME

3.2.1. Să se aproximeze caracteristicile elementelor neliniare din figura 3.1.2 cu segmente de dreaptă pe porţiuni şi să se determine schemele echivalente liniarizate pe fiecare porţiune.

3.2.2. Să se aproximeze caracteristicile elementelor neliniare analizate în problema 3.1.6 cu segmente de dreaptă pe porţiuni şi să se determine schemele echivalente liniarizate pe fiecare porţiune.

3.2.3. Să se determine punctul de operare cu ajutorul metodei schemelor echivalente pe porţiuni pentru circuitele analizate în problema 3.1.9.

3.2.4. Să se aplice metoda combinaţiei schemelor echivalente pe porţiuni la analiza cicuitelor din figura 3.1.10.

3.2.5. Să se determine schemele echivalente pe porţiuni la trioda ale cărei caracteristici sunt prezentate în figura 3.2.1.

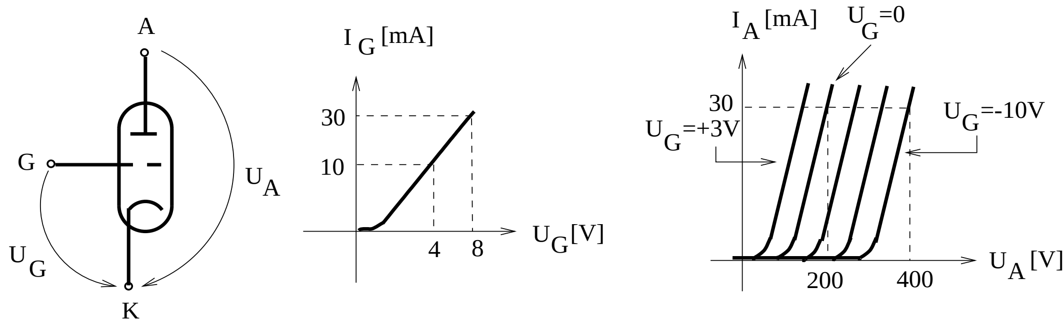


Fig. 3.2.1.

3.2.6. Să se determine schemele echivalente liniarizate pe porţiuni pentru pentoda ale cărei caracteristici sunt prezentate în figura 3.2.2.

3.2.7. Să se determine schemele echivalente liniarizate pe porţiuni pentru tranzistorul cu efect de câmp TEC cu canal n ale cărui caracteristici sunt prezentate în figura 3.2.3.

3.2.8. Să se determine schemele echivalente liniarizate pe porţiuni pentru tiristorul ale cărui caracteristici sunt prezentate în figura 3.2.4.

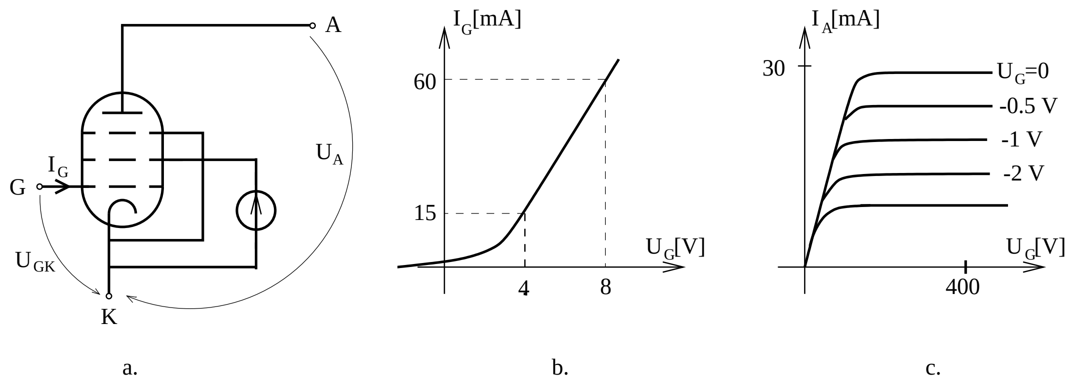


Fig. 3.2.2.

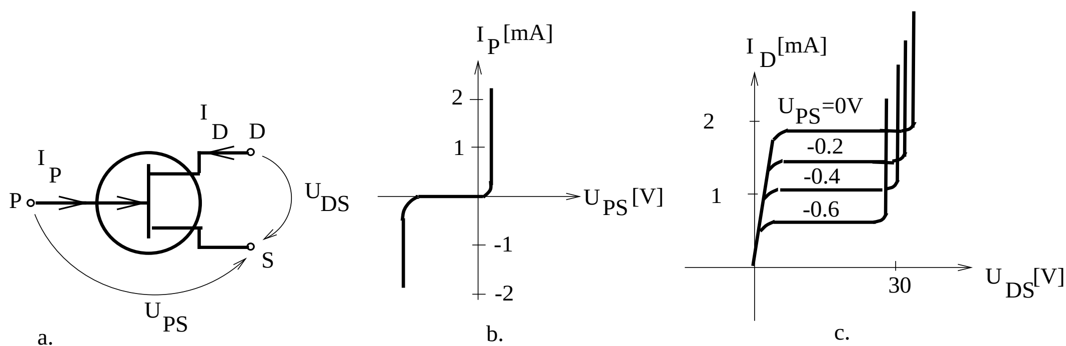


Fig. 3.2.3.

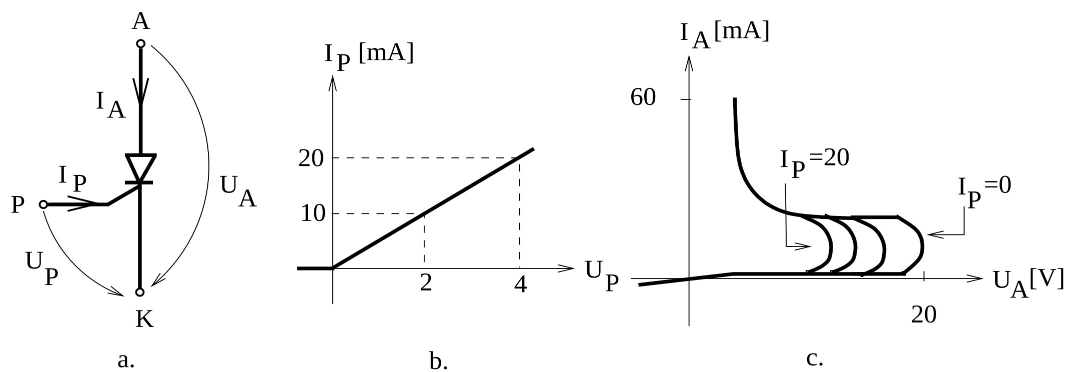


Fig. 3.2.4.

3.2.9. Să se determine grafic porţiunea pe care se află punctul de operare al tranzistorului din figura 3.2.5 şi să se calculeze coordonatele acestui punct cu ajutorul metodei schemelor echivalente liniarizate pe porţiuni. Se vor folosi schemele echivalente din figura 3.12 cu valorile R_B=1kΩ, $K_E = 10^{-4}$, $\beta = 50$, R_C=50kΩ, $U_{BE_0} = 0.6$V, $R_\alpha = 5\Omega$, $I_{CE_0} = 0$.

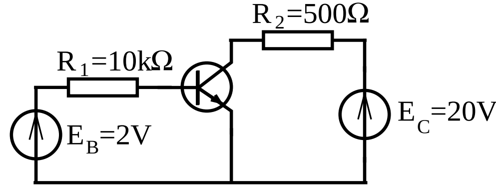


Fig. 3.2.5.

3.2.10. Să se determine poziţia punctului de funcţionare în condiţiile în care sursele E_B şi/sau E_C din problema 3.2.9. îşi schimbă polaritatea.

3.2.11. Să se calculeze eroarea care se face asupra punctului static de funcţionare dacă se utilizează pentru tranzistor modelul din figura 3.13.

3.2.12. Să se determine poziţia punctului static de funcţionare pentru tranzistoarele reprezentate în figura 3.2.6 despre care se ştie că funcţionează în regiunea activă normală. Se va folosi pentru tranzistor schema echivalentă prezentată în figura 3.13.d cu $\beta = 50$ şi $U_{CB_0} = 0$.

3.2.13. Pentru circuitele analizate în problema 3.2.12. să se determine senzitivitatea curentului de colector I_C şi a tensiunii de colector-emitor U_{CE} faţă de factorul de amplificare β al tranzistorului.

3.2.14. Să se analizeze circuitele prezentate în figura 3.2.7 cu ajutorul metodei combinaţiilor schemelor echivalente liniarizate.

3.2.15. Să se determine în ce stare (blocat sau în conducţie) se află diodele ce alcătuiesc circuitele din figura 3.2.8. Să se determine valorile tensiunii u pentru următoarele valori ale tensiunilor generatoarelor:

e_1	0	0	1	1
e_2	0	1	0	1

3.2.16. Ştiind că tranzistoarele ce alcătuiesc circuitele din figurile 3.2.10 şi 3.2.9 funcţionează în regim de comutaţie (sunt polarizate astfel încât să aibă punctele de operare în regiunea de blocaj sau în cea de saturaţie) să se determine tensiunile notate cu u şi să se identifice tranzistoarele blocate sau în conducţie.

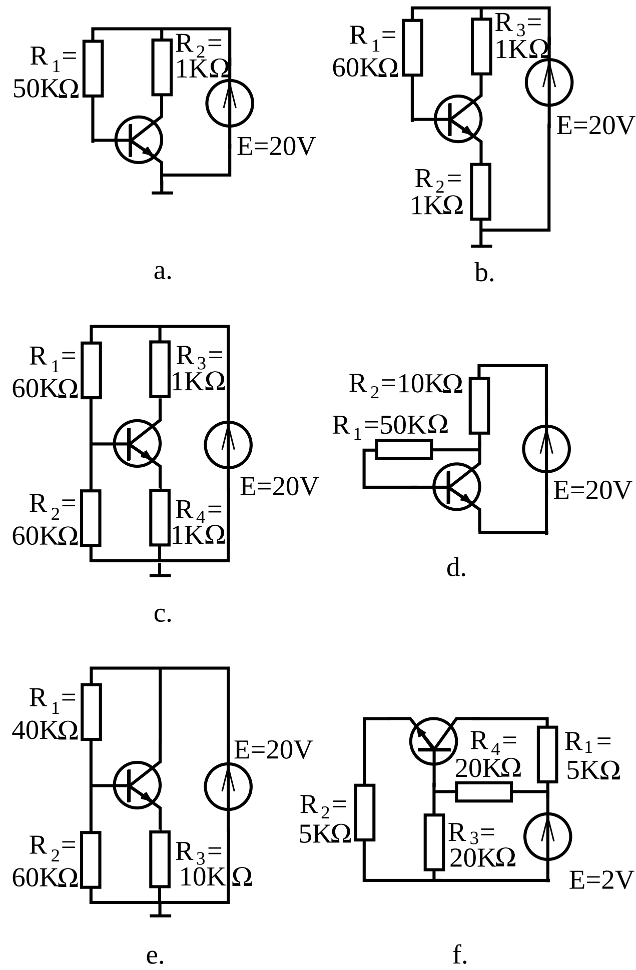


Fig. 3.2.6.

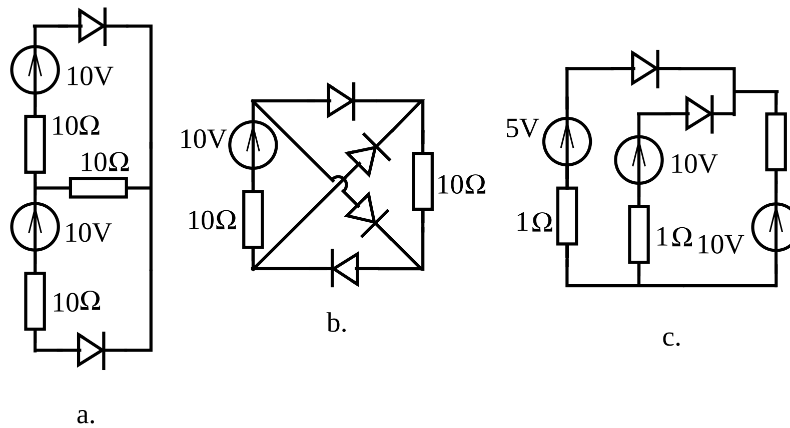


Fig. 3.2.7.

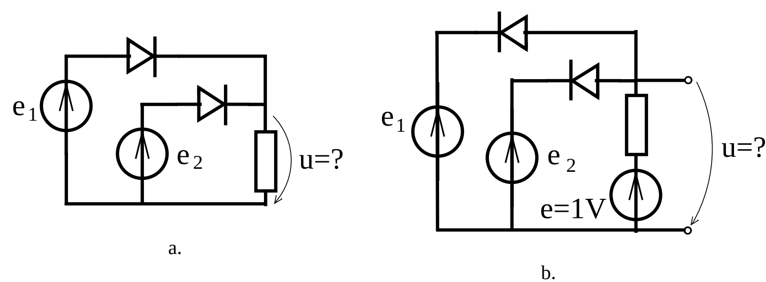


Fig. 3.2.8.

Se vor considera sursele având două valori $e = 0$ şi $e = 5V$.

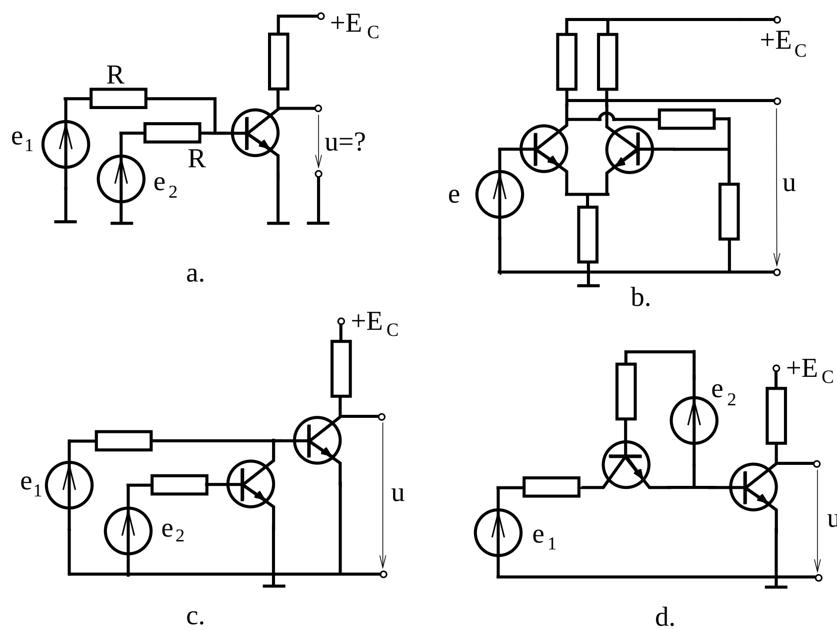


Fig. 3.2.9.

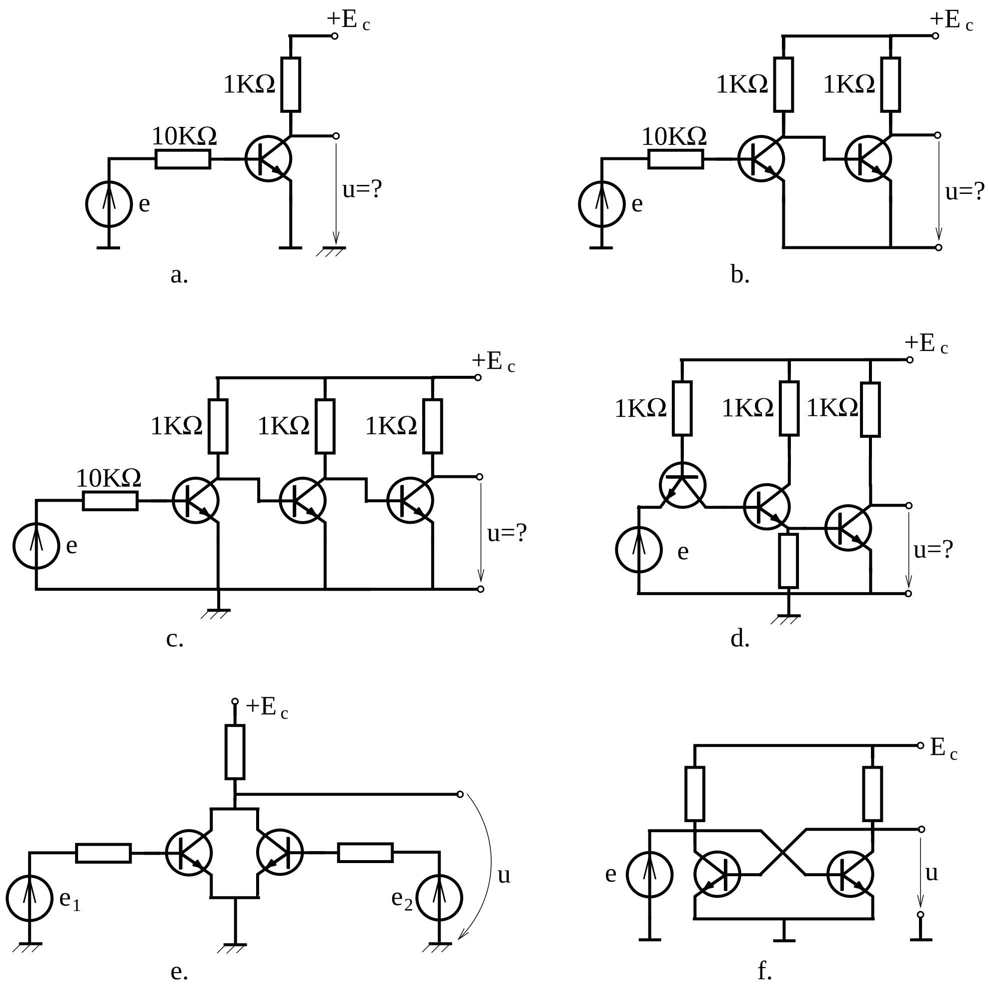

+E c
1KΩ
10KΩ
e
u=?
a.
+E c
1KΩ
1KΩ
10KΩ
e
u=?
b.
+E c
1KΩ
1KΩ
1KΩ
10KΩ
e
u=?
c.
+E c
1KΩ
1KΩ
1KΩ
e
u=?
d.
+E c
e1
e2
u
e.
E c
e
u
f.

Fig. 3.2.10.

3.3 Metoda micilor variaţii

BREVIAR

O metodă eficientă de analiză a unui circuit neliniar în condiţiile variaţiei parametrilor anumitor generatoare din circuit este **metoda micilor variaţii**. În această metodă se presupune că sursele au variaţii ale parametrilor suficient de mici, astfel încât punctele de operare ale elementelor neliniare se pot deplasa pe dreapta ce aproximează caracteristica neliniară, şi nu pe caracteristica reală, fără ca acest lucru să introducă erori inacceptabile. În cazul elementelor cu caracteristici liniare pe porţiuni, dacă variaţia surselor nu scoate punctele de operare din segmentul de dreaptă pe care se află, atunci metoda micilor variaţii este o metodă exactă.

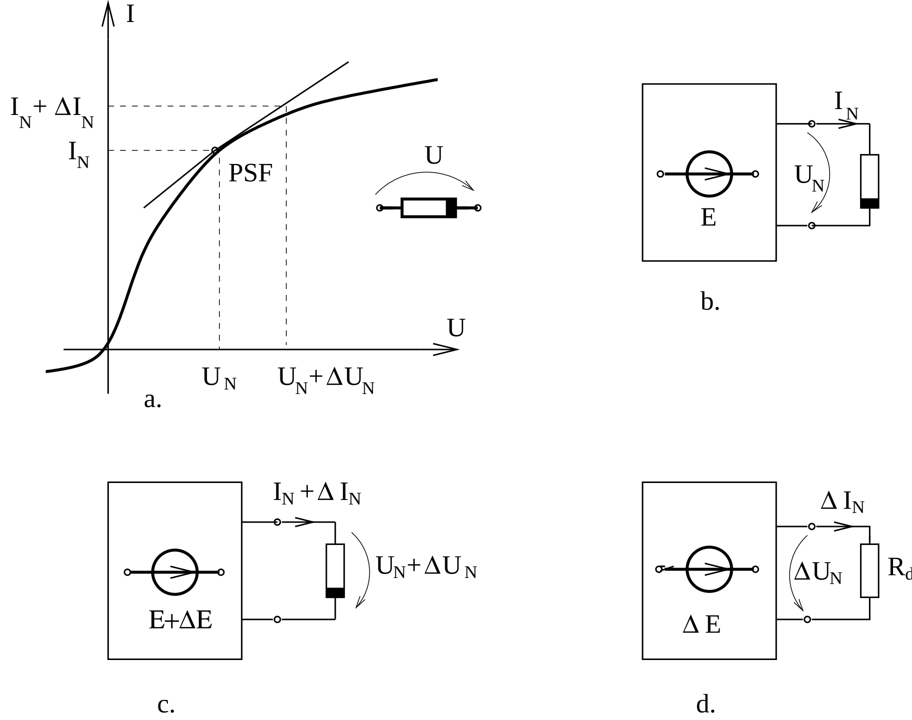


Fig. 3.14.

Fie un circuit neliniar (fig. 3.14.b) având punctul de operare (U_N, I_N) numit în continuare *punct static de funcţionare (P.S.F.)*. Tensiunile şi curenţii din circuitul neliniar considerat satisfac ecuaţiile lui Kirchhoff:

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in(n)} I_{N_k} = 0, && n = 1, 2, ..., (N-1); \\ &\sum_{k\in[b]} U_{N_k} = 0, && b = 1, 2, ..., (L-N+1) \end{aligned} \tag{3.13}$$

şi ecuaţiile de funcţionare ale laturilor:

$$U_{N_k} = \begin{cases} \widehat{U}_{N_k}(I_{N_k}), & \text{pentru laturile neliniare;} \\ R_k \cdot I_{N_k} - E_k, & \text{pentru laturile liniare.} \end{cases}$$

Dacă tensiunile electromotoare au o variaţie ΔE, atunci punctele de operare se deplasează pe caracteristicile neliniare părăsind punctele statice de funcţionare (fig. 3.14.a), iar soluţia noii probleme de analiză satisface ecuaţiile lui Kirchhoff:

$$\begin{array}{ll} \sum\limits_{k\in(n)} (I_{N_k} + \Delta I_{N_k}) = 0, & n = 1, 2, ..., (N-1), \\ \sum\limits_{k\in[b]} (U_{N_k} + \Delta U_{N_k}) = 0, & b = 1, 2, ..., (L-N-1) \end{array} \tag{3.14}$$

şi ecuaţiile de funcţionare ale laturilor:

$$\begin{cases} U_{N_k} + \Delta U_{N_k} = \widehat{U}_{N_k}(I_{N_k} + \Delta I_{N_k}), & \text{pentru laturile neliniare;} \\ U_{N_k} + \Delta U_{N_k} = R_k \cdot (I_{N_k} + \Delta I_{N_k}) - E_k - \Delta E_k, & \text{pentru laturile liniare.} \end{cases}$$

Dacă funcţiile caracteristice ale elementelor neliniare se aproximează:

$$\hat{U}_{N_k} \simeq \widehat{U}_{N_k}(I_{N_k}) + \left.\frac{d\widehat{U}}{dI}\right|_{P.S.F.} \cdot \Delta I_{N_k}, \tag{3.15}$$

prin neglijarea termenilor de ordin superior din dezvoltarea în serie Taylor în jurul punctului static de funcţionare, atunci variaţiile tensiunilor şi curenţilor satisfac ecuaţiile:

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{k\in(n)} \Delta I_{N_k} = 0; \\ \sum\limits_{k\in[b]} \Delta U_{N_k} = 0; \\ \Delta U_{N_k} = \begin{cases} R_d \Delta I_{N_k}, & \text{pentru laturile neliniare;} \\ R_k \Delta I_{N_k} - \Delta E_k, & \text{pentru laturile liniare.} \end{cases} \end{array} \tag{3.16}$$

Analizând ecuaţiile (3.16) se constată că ele pot fi asociate unui circuit, numit circuit de mici variaţii (fig. 3.14.d) ce se obţine pornind de la circuitul neliniar în care se operează substituţiile prezentate în figura 3.15 în care $R_d = d\widehat{U}/dI$ este rezistenţa dinamică a elementului neliniar în punctul static de funcţionare.

Pentru analiza unui circuit electric neliniar cu metoda micilor variaţii se parcurg următoarele etape ale **algoritmului metodei**:

1. Se calculează *rezistenţele dinamice* ale elementelor neliniare în punctele statice de funcţionare:

$$R_d = \left.\frac{d\widehat{U}}{dI}\right|_{I=I_N}. \tag{3.17}$$

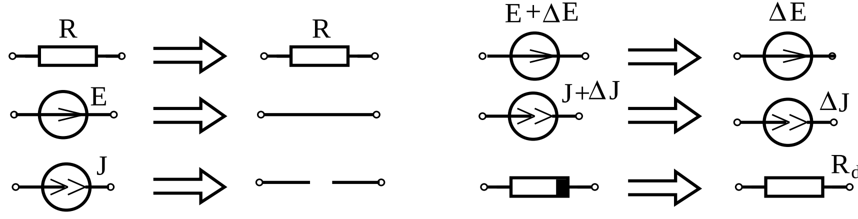


Fig. 3.15.

2. Se construieşte *circuitul liniar de mici variaţii* înlocuind elementele neliniare cu rezistoare liniare având rezistenţele egale cu rezistenţele dinamice, păstrând toate sursele comandate, iar dintre generatoare se păstrează numai cele care variază;

3. Se analizează circuitul de mici variaţii determinându-se curenţii $I_n = \Delta I_N$ şi tensiunile $U_n = \Delta U_N$ prin una din metodele de analiză a circuitelor liniare;

4. Se calculează *soluţia circuitului neliniar* în urma variaţiilor, adăugând la punctele statice de funcţionare soluţia obţinută la punctul anterior:

$$\begin{aligned} I_{Nnou} &= I_N + \Delta I_N; \\ U_{Nnou} &= U_N + \Delta U_N. \end{aligned} \tag{3.18}$$

În multe aplicaţii practice sunt utile doar variaţiile punctelor statice de funcţionare astfel încât ultima etapă a algoritmului nu mai este necesară.

Schema echivalentă de mici variaţii a tranzistorului npn funcţionând în regiunea activă normală este prezentată în figura 3.16.b, iar în cazul modelului simplificat schema este cea din figura 3.16.c.

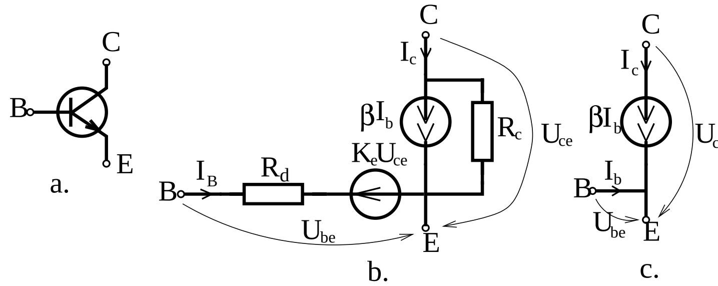


Fig. 3.16.

Se constată că tranzistorul, din punctul de vedere energetic, la mari variaţii este un element pasiv din punct de vedere energetic, dar la semnal mic el este un element activ, fiind reprezentat de o sursă de curent comandată în curent cu factorul de amplificare β.

PROBLEME

3.3.1. Să se determine schemele echivalente de semnal mic pentru elementele dipolare neliniare ale căror caracteristici sunt prezentate în figura 3.1.2. Se vor considera diferite puncte statice de funcţionare.

3.3.2. Să se determine schemele echivalente de semnal mic pentru elementele tripolare neliniare studiate în problemele 3.2.5.-3.2.8, atunci când generatoarele ideale au o variaţie a parametrilor de +1%.

3.3.3. Să se determine noile puncte de operare ale elementelor neliniare ce au fost analizate în problemele 3.1.9.-3.1.12, atunci când generatoarele au o variaţie a parametrilor de +1%.

3.3.4. Să se determine variaţia tensiunii colector-emitor pentru tranzistorul analizat în problema 3.2.9, atunci când tensiunea electromotoare E_B variază cu $\Delta E_B = 0,1V$.

3.3.5. Să se studieze etajul amplificator cu un tranzistor prezentat în figura 3.3.1. Se vor calcula: rezistenţa echivalentă de intrare, amplificarea şi rezistenţa echivalentă de ieşire pentru semnalele de mici variaţii. Se vor utiliza atât schema echivalentă a tranzistorului prezentată în figura 3.15.b cât şi schema simplificată din figura 3.15.c şi se va estima eroarea de aproximare.

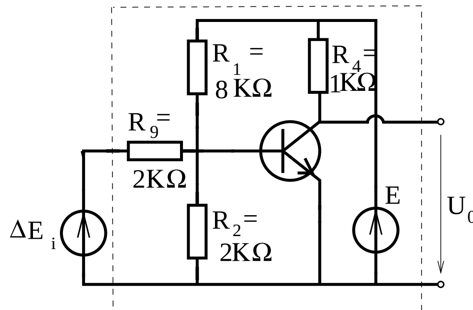


Fig. 3.3.1.

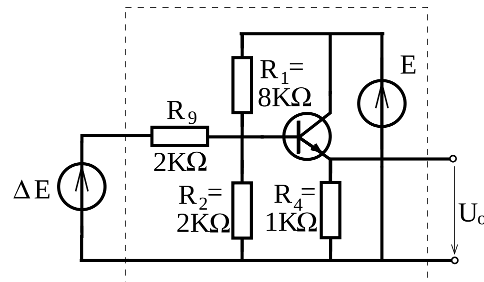


Fig. 3.3.2.

3.3.6. Să se studieze comportarea la mici variaţii a etajului repetor cu un tranzistor, prezentat în figura 3.3.2. Se vor calcula: amplificarea etajului, rezistenţele echivalente de ieşire şi de intrare. Se va adopta schema echivalentă de semnal mic simplificată pentru tranzistor.

3.3.7. Să se studieze comportarea la mici variaţii a amplificatorului diferenţial reprezentat în figura 3.3.3. Se vor calcula amplificarea etajului şi rezistenţele echi-

valente de intrare şi ieşire.

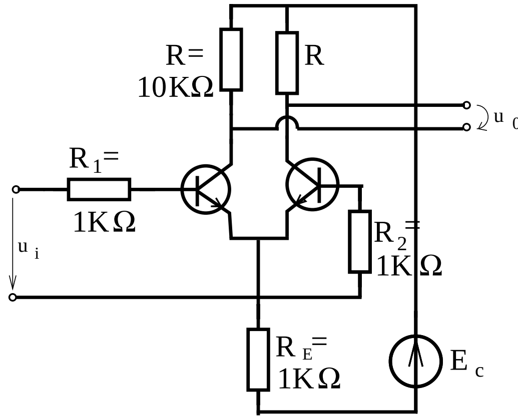


Fig. 3.3.3.

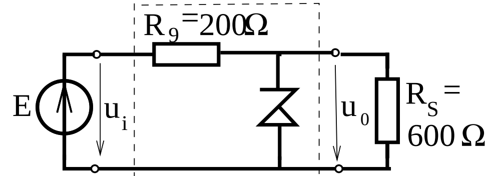


Fig. 3.3.4.

3.3.8. Să se calculeze variaţia procentuală a tensiunii de ieşire la stabilizatorul cu diodă Zener prezentat în figura 3.3.4, atunci când tensiunea de intrare are o variaţie de 1%. Se va considera rezistenţa dinamică a diodei pe zona Zener $R_d = 2\Omega$.

3.3.9. Să se studieze variaţia procentuală a tensiunii de ieşire la stabilizatorul de tensiune prezentat în figura 3.3.5, atunci când tensiunea de intrare are o variaţie de 1%. Se va considera rezistenţa dinamică a diodei pe zona Zener $R_d = 2\Omega$ iar factorul de amplificare în curent al tranzistorului $\beta = 50$.

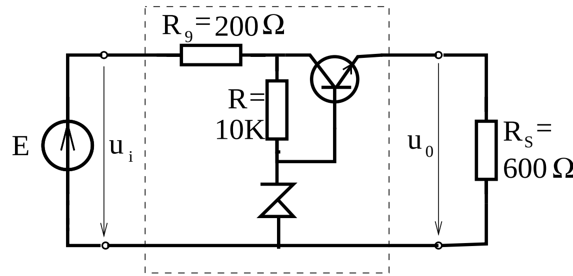


Fig. 3.3.5.

3.3.10. Aplicând tehnica schemelor echivalente liniarizate pe porţiuni să se analizeze circuitul din figura 3.3.6. Pentru ce valori ale rezistenţei R variaţiile tensiunii de intrare nu sunt transmise la ieşire?

3.3.11 Se consideră un tranzistor conectat ca un cuadripol diport. Să se determine pentru cele trei conexiuni din figura 3.3.7 şi anume: (a) emitor comun, (b) colector comun şi (c) bază comună care sunt matricile rezistenţă, conductanţă şi hibridă, pentru circuitul echivalent liniar de mici variaţii. Să se exprime elementele acestor matrici în funcţie de cei patru parametri utilizaţi în figura 3.16.b.

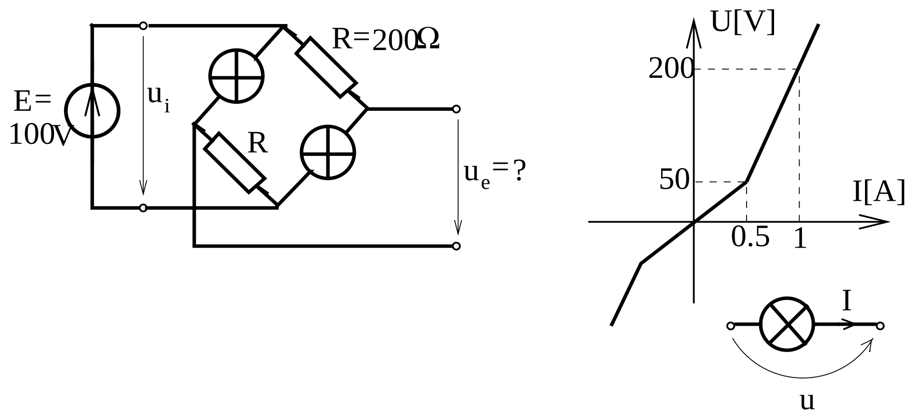


Fig. 3.3.6.

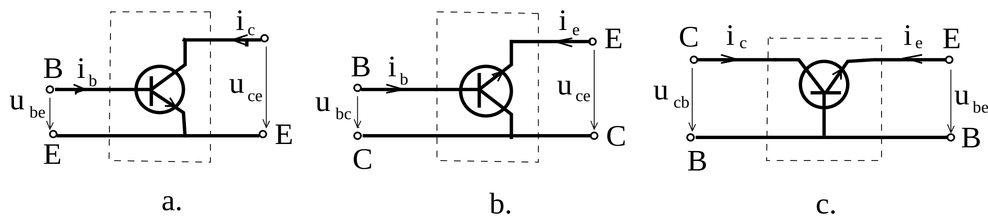


Fig. 3.3.7.

3.4 Metode iterative pentru analiza circuitelor rezistive neliniare

BREVIAR

Problema analizei circuitelor electrice rezistive neliniare presupune rezolvarea unui sistem de ecuaţii algebrice neliniare alcătuit din ecuaţiile lui Kirchhoff:

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in(n)}^{alg} I_k = 0, \qquad n = 1, 2, ..., (N-1); \\ &\sum_{k\in[b]}^{alg} U_k = 0, \qquad b = 1, 2, ..., (L-N+1); \end{aligned} \tag{3.19}$$

şi din ecuaţiile de funcţionare ale laturilor:

$$U_k = \widehat{U}(I_k), \qquad k = 1, 2, ..., L; \tag{3.20}$$

dacă elementele sunt controlate în curent, sau

$$I_k = \hat{I}(U_k), \qquad k = 1, 2, ..., L, \tag{3.21}$$

dacă elementele sunt controlate în tensiune. Sistemul (3.19)-(3.21) alcătuit din L ecuaţii algebrice liniare şi L ecuaţii neliniare cu necunoscute curenţii din laturi I_k şi tensiunile la bornele laturilor U_k, unde k=1,2,...,L.

Scris sub formă compactă sistemul devine:

$$G(x) = 0, \tag{3.22}$$

în care $x = [I_1, I_2, ..., I_L, U_1, U_2, ..., U_L]^T$ şi G este o aplicaţie de la $\mathbb{R}^{2L}$ la $\mathbb{R}^{2L}$. Cea mai larg utilizată tehnică de soluţionare a ecuaţiei (3.22) este **metoda iterativă** bazată pe construcţia unui şir $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ convergent către limita x^* care satisface ecuaţia (3.22). Dacă norma erorii $||x_k - x^*||$ este suficient de mică, atunci termenul x_k din şir este o aproximaţie satisfăcătoare a soluţiei. O metodă de construire a şirului iterativ este algoritmul numit de *punct fix*, în care ecuaţia (3.22) se aduce sub forma echivalentă:

$$x = F(x),$$

urmând ca pornind de la o iniţializare arbitrară să se genereze şirul iterativ:

$$x_{k+1} = F(x_k). \tag{3.23}$$

Dacă matricea jacobian a aplicaţiei F satisface inegalitatea:

$$||F'|| < 1, \tag{3.24}$$

se poate arăta că şirul generat de (3.23) converge către soluţia x^* a ecuaţiei (3.4), soluţie numită punctul fix al aplicaţiei F. Pentru a aduce ecuaţia (3.22) la forma (3.4) se poate utiliza relaţia:

$$x = x - K(x)G(x), \tag{3.25}$$

în care K(x) este o matrice nesingulară astfel încât să fie satisfăcută condiţia (3.24). O alegere avantajoasă este dată de **metoda Newton-Raphson**, în care K(x) este inversa matricii jacobian a aplicaţiei G:

$$x_{k+1} = x_k - [G'(x_k)]^{-1} \cdot G(x_k). \tag{3.26}$$

Pentru a reduce efortul de calcul, **metoda Newton-Kantorovici** utilizează pentru K(x) inversa matricii jacobian a aplicaţiei G calculată în punctul $x = x_1$, corespunzător iniţializării:

$$x_{k+1} = x_k - [G'(x_1)]^{-1} \cdot G(x_k). \tag{3.27}$$

Dacă se estimează matricea jacobian pentru un punct x_0, altul decât un termen al şirului, atunci se obţine **metoda iteraţiei simple** în care:

$$x_{k+1} = x_k - [G'(x_0)]^{-1} \cdot G(x_k). \tag{3.28}$$

Analizând relaţia (3.26) rezultă că la fiecare iteraţie trebuie rezolvat un sistem liniar de ecuaţii de forma:

$$G'(x_k) \cdot \Delta x_k = -G(x_k), \tag{3.29}$$

urmând ca:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k. \tag{3.30}$$

Aplicând metoda Newton-Raphson pentru rezolvarea sistemului de ecuaţii (3.19)-(3.20) şi notând:

$$\begin{aligned}
g_i &= \sum_{k\in(n)}^{alg} I_k, \quad \text{pentru} \;\; n = 1, ..., (N-1);\\
g_i &= \sum_{k\in[b]}^{alg} U_k, \quad \text{pentru} \;\; b = N, ..., L;\\
g_{i+L} &= U_i - \hat{U}(I_i), \quad \text{pentru} \;\; i = 1, ..., L
\end{aligned} \tag{3.31}$$

rezultă că la fiecare iteraţie trebuie rezolvat sistemul de ecuaţii liniare (3.32) în care A şi B sunt matricile de incidenţă a laturilor la noduri, respectiv la buclele fundamentale, iar R_{dk} este rezistenţa dinamică a elementului neliniar din latura

k evaluată în punctul de operare stabilit la iteraţia anterioară. Termenii liberi ai sistemului au valori date de relaţiile (3.31), dar cu semn schimbat.

$$\begin{bmatrix} & & A & & & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ & & 0 & & & \vdots & B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -R_{d_1} & & & & 0 & \vdots & 1.0...0 \\ & \ddots & & & & \vdots & 0.1..0 \\ & & \ddots & & & \vdots & \\ & & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & & -R_{d_L} & \vdots & 0.0..1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta I_1 \\ \Delta I_2 \\ \vdots \\ \Delta I_L \\ \Delta U_1 \\ \vdots \\ \Delta U_L \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_L \\ g_{L+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{2L} \end{bmatrix} \tag{3.32}$$

Vom presupune că iniţializarea satisface ecuaţiile lui Kirchhoff (3.19-3.20), fapt evident dacă se alege de exemplu $x_1 = 0$. În aceste condiţii la orice iteraţie soluţia obţinută satisface ecuaţiile lui Kirchhoff, dar nu şi ecuaţiile constitutive ale elementelor neliniare. Dacă circuitul analizat cu metoda Newton-Raphson este un circuit liniar, atunci prima iteraţie coincide cu soluţia exactă a circuitului. Relaţiile (3.32) reprezintă ecuaţiile unui circuit liniar asociat fiecărei iteraţii. Acest circuit se obţine înlocuind elementele neliniare (fig. 3.17.a) cu circuitul din figura 3.17.b, în cazul elementelor controlate de curent şi cu circuitul din figura 3.17.c, în cazul elementelor controlate de tensiune.

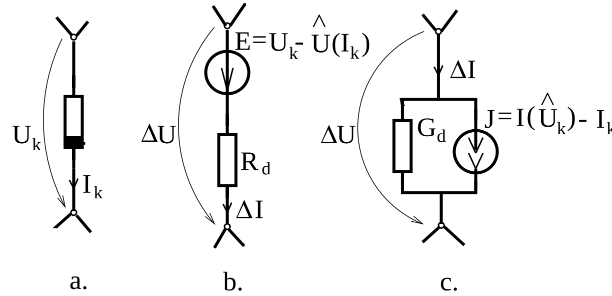


Fig. 3.17.

În figura 3.17 s-au notat cu U_k şi I_k tensiunea şi curentul elementului neliniar obţinute la iteraţia anterioară, R_d reprezintă rezistenţa dinamică şi G_d este conductanţa dinamică a elementului neliniar, calculate în punctele I_k, respectiv U_k:

$$R_d = \left. \frac{d\widehat{U}}{dI} \right|_{I=I_k} ; \quad G_d = \left. \frac{d\hat{I}}{dU} \right|_{U=U_k} , \tag{3.33}$$

iar parametrii generatoarelor sunt:

$$\begin{aligned} E &= U_k - \widehat{U}(I_k); \\ J &= I_k - \hat{I}(U_k). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Parametrii E şi J daţi de (3.34) pun în evidenţă abaterea punctului de operare P_k determinat la iteraţia anterioară, faţă de curba caracteristică a elementului (fig. 3.18).

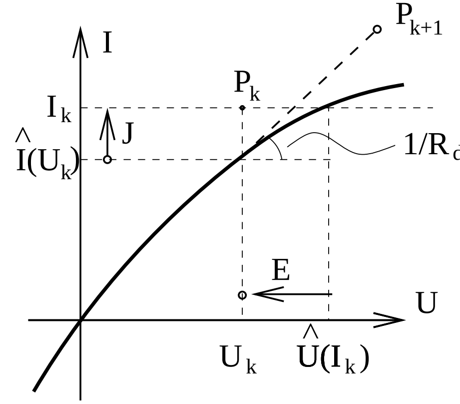


Fig. 3.18.

În urma analizei circuitului liniarizat asociat se determină corecţiile (variaţiile) curenţilor ΔI şi tensiunilor ΔU la bornele laturilor, urmând ca aproximarea soluţiei la iteraţia $k+1$ să fie:

$$\begin{aligned} U_{k+1} &= U_k + \Delta U, \\ I_{k+1} &= I_k + \Delta I. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Dacă $||\Delta U||$ şi $||\Delta I||$ nu sunt suficient de mici, atunci se reia procedura iterativă urmând ca punctul de operare $P_{k+1}(U_{k+1}, I_{k+1})$ să fie situat pe tangenta la curba de funcţionare (fig. 3.18).

Din relaţia (3.27) rezultă că metoda Newton-Kantorovici presupune la fiecare iteraţie analiza unui circuit liniar asociat circuitului neliniar construit ca în metoda Newton-Raphson (fig. 3.17), cu deosebirea că rezistenţele şi conductanţele circuitului asociat sunt calculate în punctele de operare iniţiale:

$$R_d = \left.\frac{d\hat{U}}{dI}\right|_{I=I_1}; G_d = \left.\frac{d\hat{I}}{dU}\right|_{U=U_1}. \tag{3.36}$$

În cazul metodei iteraţiei simple, circuitul liniar asociat fiecărei iteraţii are rezistenţele şi conductanţele alese apriori (ele sunt numite rezistenţe sau conductanţe de calcul). Pentru a obţine o convergenţă cât mai rapidă este preferabil

ca ele să aibă valorile cât mai aproape de rezistenţele, respectiv conductanţele dinamice corespunzătoare soluţiei exacte.

În general, metoda Newton-Raphson este mai rapid convergentă decât celelalte două metode, dar necesită un efort de calcul mai mare datorită evaluării rezistenţelor dinamice la fiecare iteraţie. Metoda Newton-Kantorovici şi metoda iteraţiei simple au avantajul că partea rezistivă a circuitului asociat rămâne aceeaşi la toate iteraţiile, deci este necesară inversarea matricei sistemului (3.32) o singură dată. Metoda Newton-Kantorovici aplicată la un circuit liniar permite obţinerea soluţiei exacte după o singură iteraţie, lucru ce nu se întâmplă în cazul iteraţiei simple. Cu toate acestea, metoda iteraţiei simple poate avea un domeniu mai larg de convergenţă în condiţiile alegerii avantajoase a rezistenţelor şi conductanţelor de calcul.

Circuitele liniarizate asociate fiecărei iteraţii, prezentate în figura 3.17, sunt circuite de variaţii. Dacă se utilizează circuite liniare asociate, din analiza cărora să rezulte curenţii şi tensiunile la iteraţia curentă:

$$\Delta U = R_d \cdot \Delta I - E \Rightarrow U_{k+1} = R_d \cdot I_{k+1} - [R_d \cdot I_k - \widehat{U}(I_k)], \tag{3.37}$$

atunci acestea vor avea laturile de tipul celor prezentate în figura 3.19.

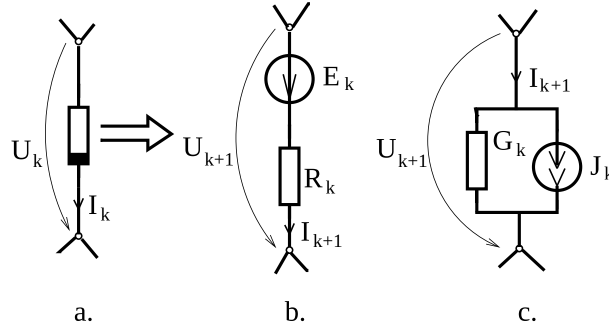


Fig. 3.19.

În cazul metodei Newton-Raphson, conform relaţiei (3.37) rezultă că R_k este rezistenţa dinamică asociată curentului I_k, iar $E_k = R_d \cdot I_k - \hat{U}(I_k)$, caracteristica fiind aproximată în iteraţia următoare prin dreapta Δ_N (fig. 3.20).

Dacă se utilizează pentru aproximarea caracteristicii neliniare dreapta Δ_R (fig. 3.20), atunci metoda astfel generată se va numi **metoda rezistenţei statice**.

Dacă se aproximează caracteristica neliniară, în iteraţia următoare, cu o dreaptă ce trece prin punctul de operare P_k, dar are o altă pantă decât derivata caracteristicii în punctul respectiv (dreapta Δ_S), atunci metoda astfel generată se numeşte **metoda iteraţiei surselor**.

Tehnica de aproximare a caracteristicii neliniare printr-o dreaptă ce trece prin origine şi prin punctul de operare determinat la iteraţia anterioară generează **metoda iteraţiei rezistenţei statice**.

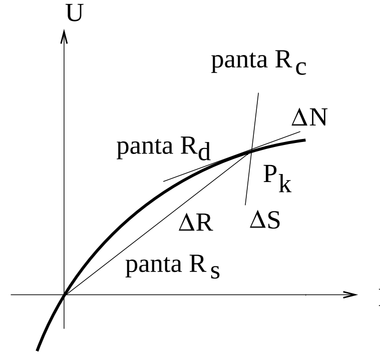


Fig. 3.20.

Dacă un element neliniar are caracteristica monotonă, atunci el poate fi comandat fie de tensiune fie de curent. Din punctul de vedere al iteraţiilor, cele două posibilităţi nu sunt echivalente. Este posibil ca procesul să fie convergent într-un caz şi divergent în celălalt. Din acest motiv, în rezolvarea iterativă a circuitelor neliniare trebuie dată atenţie modului în care sunt comandate elementele neliniare. De exemplu, în cazul metodei rezistenţei statice dacă rezistenţa statică creşte o dată cu curentul ($R_d > R_s$), atunci este preferabilă utilizarea controlului în curent, iar dacă rezistenţa statică scade cu curentul ($R_d < R_s$) este preferabilă utilizarea controlului în tensiune. În cazul metodei iteraţiei surselor, pentru asigurarea convergenţei trebuie aleasă rezistenţa de calcul R_c în intervalul cuprins între valoarea minimă şi maximă a rezistenţei dinamice (de preferinţă în centrul intervalului), în cazul controlului în curent, iar în cazul controlului în tensiune conductanţa de calcul se alege între valoarea minimă şi maximă a conductanţei dinamice.

În general, metoda rezistenţei dinamice este mai rapid convergentă, dar cere un efort mai mare de calcul la fiecare iteraţie şi are domeniul de convergenţă mai restrâns, în sensul că iniţializarea trebuie să fie suficient de aproape de soluţie pentru ca procedeul să fie convergent. Metoda iteraţiei surselor este mai lent convergentă, dar are un domeniu de convergenţă ce poate fi mărit prin alegerea convenabilă a rezistenţei de calcul.

În cazul elementelor neliniare ce au caracteristica liniarizată pe porţiuni se poate utiliza un algoritm de căutare a intervalelor în care se află punctele de operare ale elementelor neliniare. **Algoritmul Katzenelson**, prezentat în continuare, este garantat convergent într-un număr finit de paşi, minimizând într-un anumit sens drumul pe care se caută soluţia. Pentru aplicarea acestei metode se consideră o iniţializare a soluţiei într-o combinaţie de intervale şi se substituie elementele neliniare cu schemele lor echivalente liniarizate. Dacă soluţia circuitului liniar corespunde unor puncte de operare ale elementelor neliniare ce se află în combinaţia de intervale considerate, atunci aceasta este şi soluţia circu-

itului neliniar, iar dacă punctele de operare calculate se află în alte intervale, atunci se modifică, dintre toate schemele echivalente liniarizate, o schemă corespunzătoare unui singur element neliniar. Identificarea elementului neliniar a cărei porţiune de funcţionare urmează să se modifice se face analizând soluţia aproximativă obţinută, urmând să-şi modifice porţiunea de funcţionare elementul cel mai solicitat în acest sens. La fiecare iteraţie, doar un singur element neliniar îşi modifică schema echivalentă trecând într-o porţiune de funcţionare nouă, ce este obligatoriu vecină cu cea veche. În acest fel modificările sunt făcute din aproape în aproape fără să aibă loc salturi pe caracteristicile neliniare, până se identifică intervalul în care se află punctul de operare.

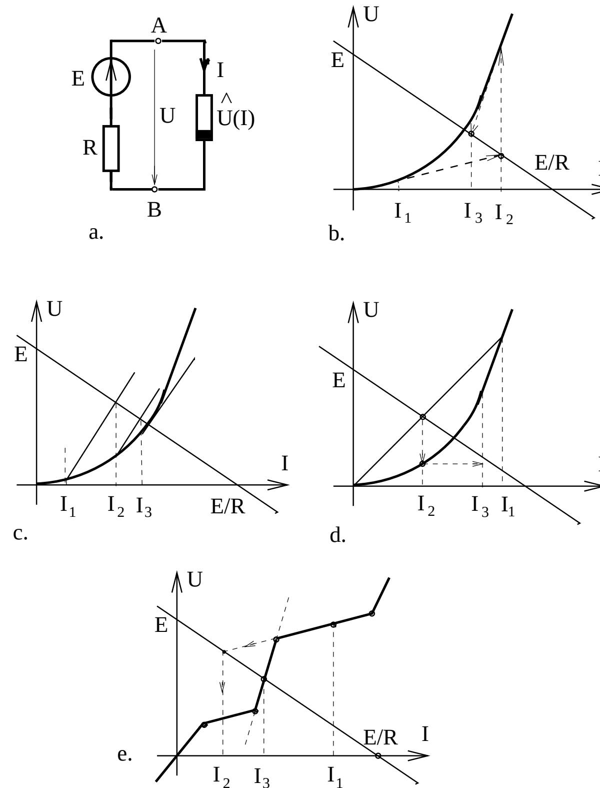


Fig. 3.21.

În figura 3.21 sunt prezentate grafic iteraţiile ce se fac la analiza circuitului din figura 3.21.a prin următoarele metode: (b) metoda rezistenţei dinamice; (c) metoda iteraţiei surselor; (d) metoda rezistenţei statice şi (e) metoda Katzenelson.

PROBLEME

3.4.1. Să se prezinte grafic analiza iterativă a circuitului neliniar din figura 3.21.a cu metodele Newton-Raphson, Newton-Kantorovici şi metoda iteraţiei simple.

3.4.2. Să se prezinte grafic analiza iterativă a circuitului neliniar din figura 3.21.a cu diferite metode presupunând elementul neliniar controlat în curent.

3.4.3. Să se analizeze grafic convergenţa metodei rezistenţei dinamice pentru circuitul din figura 3.21.a cu caracteristica elementului neliniar prezentată în figura 3.4.1. Analiza va fi efectuată pentru diferite iniţializări.

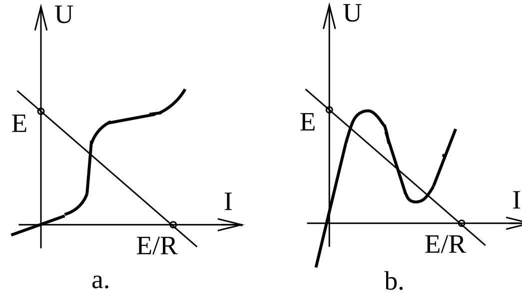


Fig. 3.4.1.

3.4.4. Să se analizeze grafic convergenţa metodei iteraţiei surselor pentru circuitul din figura 3.21.a. Analiza va fi efectuată pentru diferite rezistenţe de calcul considerând caracteristicile elementului neliniar cele din figura 3.4.1.

3.4.5. Ecuaţia circuitului din figura 3.4.2 $\widehat{U}(I) + R \cdot I = E$ pusă sub forma:

$$I = \frac{E - \widehat{U}(I)}{R}$$

generează o procedură iterativă de punct fix.

Utilizând criteriul de convergenţă (3.24) să se stabilească condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească funcţia caracteristică $\widehat{U}(I)$ a elementului neliniar pentru ca iteraţiile să fie convergente.

3.4.6. Ecuaţia de funcţionare a circuitului din figura 3.4.3 poate fi pusă sub următoarea formă a unei ecuaţii cu punct fix: $U = E - R \cdot \hat{I}(U)$. Să se determine condiţia ce trebuie îndeplinită de funcţia caracteristică $\hat{I}(U)$ pentru ca procedura de punct fix să fie convergentă.

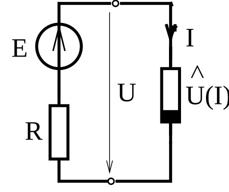


Fig. 3.4.2.

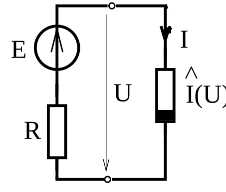


Fig. 3.4.3.

3.4.7. Ţinând cont de rezultatele problemelor anterioare să se specifice procedura de punct fix ce trebuie aplicată la analiza circuitelor din figura 3.4.4.b şi 3.4.4.c. Poate fi analizat circuitul din figura 3.4.4.d cu o procedură simplă de punct fix ?

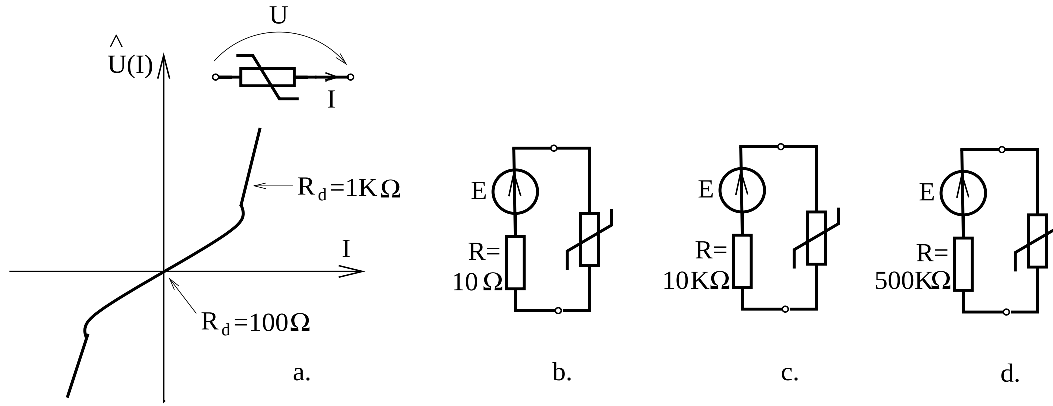


Fig. 3.4.4.

3.4.8. Ce valoare poate avea constanta K astfel încât procedura iterativă de punct fix generată de ecuaţia:

$$I = I + K \cdot \frac{(E - \widehat{U}(I))}{R},$$

scrisă pentru circuitul din figura 3.4.3, să fie garantat convergentă? Ce semnifica'tie fizică poate avea constanta K ?

3.4.9. Conform teoremei Picard-Banach o ecuaţie $x = F(x)$ la care $\mid F' \mid \leq \lambda < 1$ generează un şir al aproximaţiilor succesive $x_{k+1} = F(x_k)$ ce tinde către punctul fix $x^* = F(x^*)$, iar un termen al şirului satisface inegalitatea:

$$\mid x_k - x^* \mid \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} \mid x_1 - x_0 \mid .$$

Să se estimeze eroarea ce a fost făcută la rezolvarea problemei 3.4.8. în zece iteraţii. Câte iteraţii trebuiesc făcute ca erorea relativă să fie sub 0,1%?

3.4.10. Să se determine valoarea constantei K din problema 3.4.8., pentru ca procedura iterativă să fie cât mai rapid convergentă.

3.4.11. Aplicând criteriul de convergenţă (3.24) să se analizeze convergenţa metodei Newton-Kantorovici pentru circuitele din figura (3.4.3). Să se determine domeniul în care poate fi aleasă iniţializarea pentru ca procesul să fie convergent. Să se estimeze eroarea de aproximare după un număr dat de iteraţii.

3.4.12. Aplicând criteriul de convergenţă (3.24) să se determine condiţia pe care trebuie să o îndeplinească derivata a doua $U''(I)$ pentru ca procedeul Newton-Raphson aplicat la rezolvarea problemei 3.4.6. să fie convergent.

3.4.13. Aplicând criteriul de convergenţă (3.24) să se analizeze convergenţa metodei iteraţiei simple pentru rezolvarea problemei din figura 3.4.3. Ce valoare trebuie să aibă rezistenţa de calcul R_c pentru ca procedura să fie convergentă?

3.4.14. Să se rezolve problemele 3.4.11-3.4.13 presupunând elementul neliniar controlat în tensiune. Să se compare rezultatele obţinute.

3.4.15. Să se scrie ecuaţiile corespunzătoare metodei rezistenţei dinamice şi iteraţiei surselor pentru circuitele din figura 3.4.3. Să se compare rezultatele obţinute cu ecuaţiile utilizate în rezolvarea problemelor 3.4.11 şi 3.4.12.

3.4.16. Să se stabilească forma matriceală a ecuaţiilor ce trebuie rezolvate la fiecare iteraţie în metoda Newton-Raphson dacă din relaţiile (3.19)-(3.21) se elimină o parte din necunoscute. Exemplificare pentru metodele Kirchhoff referitoare la curenţi sau la tensiuni, sau pentru cazul în care rămân ca necunoscute principale curenţii din coardele unui coarbore sau potenţialele nodurilor.

3.4.17. Să se scrie forma matriceală a ecuaţiilor circuitului liniarizat asociat iteraţiilor în metoda rezistenţei dinamice. Ecuaţiile vor fi scrise pentru metodele Kirchhoff, curenţilor ciclici şi potenţialelor nodurilor.

3.4.18. Să se determine circuitele echivalente liniarizate corespunzătoare iteraţiilor metodelor Newton-Raphson şi rezistenţelor dinamice pentru circuitele neliniare din figura 3.4.5.

3.4.19. Să se analizeze circuitele asociate iteraţiilor din problema 3.4.18. Să se compare expresiile relaţiilor de iteraţie pentru cele două metode.

3.4.20. Să se reprezinte şi analizeze circuitele liniare asociate diferitelor metode iterative aplicate circuitelor din figura 3.4.6.

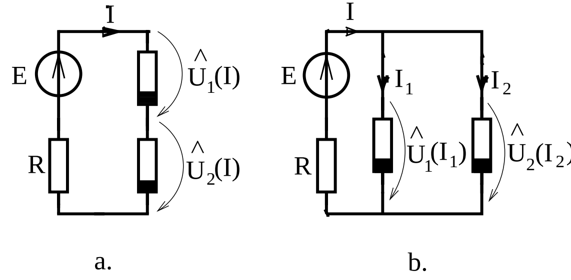


Fig. 3.4.5.

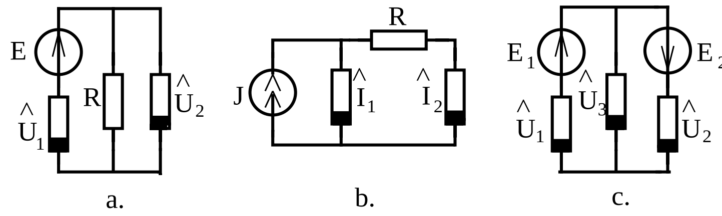


Fig. 3.4.6.

3.4.21. Să se calculeze numeric primele două iteraţii ale diferitelor metode pentru circuitele neliniare din figura 3.4.7.

3.4.22. Să se rezolve problema 3.4.21. considerând elementul neliniar controlat în tensiune.

3.4.23. Să se analizeze circuitele neliniare din figura 3.4.7 cu ajutorul metodei Katzenelson.

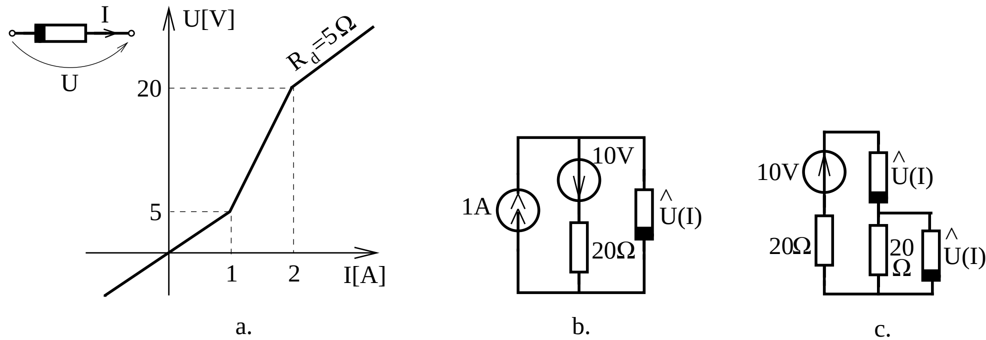


Fig. 3.4.7.

3.5 Teoremele circuitelor rezistive neliniare

BREVIAR

În continuare sunt prezentate conceptele fundamentale ce intervin în analiza circuitelor rezistive neliniare.

Punctul de operare al unui element dipolar rezistiv reprezintă punctul P din planul U-I, având drept coordonate tensiunea la bornele elementului U şi curentul I prin element, stabilite atunci când elementul este introdus într-un anumit circuit. Punctul de operare al unui circuit electric neliniar este un punct în spaţiul $\mathbb{R}^{2L}$, având coordonatele tensiunile şi curenţii din laturile circuitului. Punctul de operare al unui circuit cu surse invariante în timp reprezintă soluţia problemei de analiză a circuitului respectiv. După cum se vede din figura 3.22, în funcţie de parametrii circuitului (E,R) un circuit (a) poate: (b) să nu aibă soluţie; (c) poate să aibă soluţie unică, (d) să aibă un număr finit de soluţii sau (e) să aibă un număr infinit de soluţii.

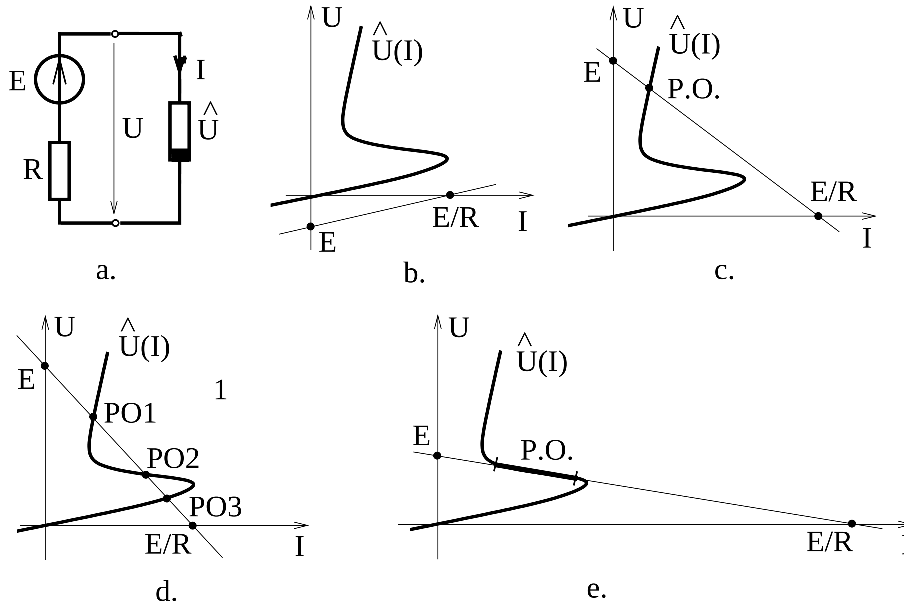


Fig. 3.22.

Caracteristica de intrare a unei porţi a unui circuit neliniar reprezintă relaţia între curentul şi tensiunea porţii. După felul în care este excitată poarta, există două feluri de caracteristici de intrare, cu comandă în tensiune (fig. 3.23.a) sau cu comandă în curent (fig. 3.23.b).

Caracteristica de transfer a unui circuit neliniar, faţă de două porţi ale unui circuit este relaţia dintre o mărime a porţii de intrare şi una a porţii de ieşire. Se pot defini patru feluri de caracteristici de transfer (fig. 3.24).

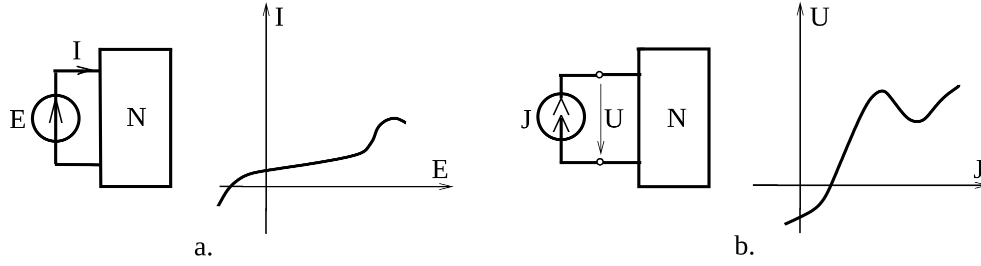


Fig. 3.23.

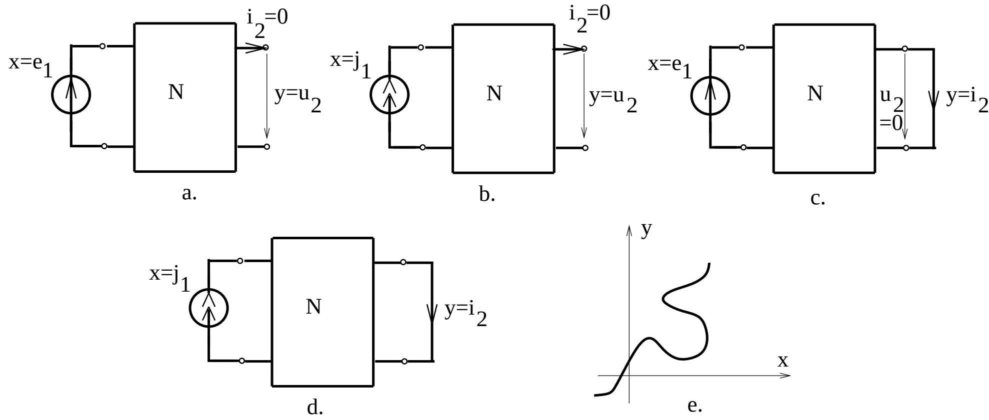


Fig. 3.24.

Se constată că aceste caracteristici de transfer nu sunt în mod necesar funcţii (fig. 3.24.e).

Caracteristica de transfer a puterii reprezintă relaţia dintre puterea p disipată de un element dipolar din circuit şi o mărime de excitaţie a unei porţi prin care se alimentează circuitul (fig. 3.25.c).

Din considerente fizice, orice element de circuit are o limită a puterii pe care o poate disipa. Puterea maximă $P_{max} = U \cdot I$ defineşte în planul caracteristicii unui element două hiperbole limită (fig. 3.25.b), pe care punctul de operare trebuie să nu le depăşească. Caracteristica de transfer a puterii permite identificarea zonelor admisibile pentru mărimea de excitaţie. Caracteristica de transfer a puterii se obţine prin multiplicarea caracteristicilor de transfer ale tensiunii *u(e)* şi curentului *i(e)*. Relaţiile fundamentale ale circuitelor neliniare, ca de altfel ale întregii teorii a circuitelor, sunt **teoremele lui Kirchhoff** sub formă generală:

$$\sum_{k \in \{s\}}^{alg.} i_k = 0, \qquad s = 1, 2, ..., (N-1); \tag{3.38}$$

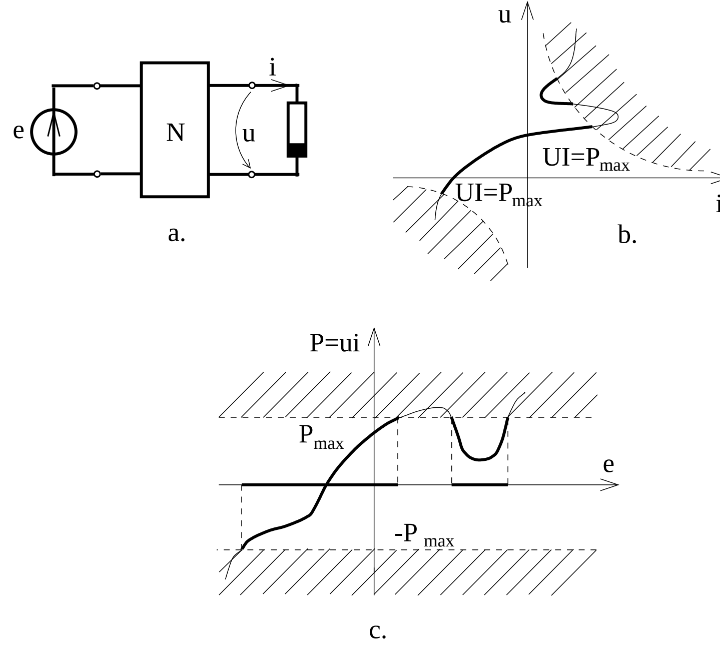


Fig. 3.25.

$$\sum_{k\in[b]}^{alg.} u_k = 0, \qquad b = 1, 2, ..., (L - N + 1); \tag{3.39}$$

Relaţia (3.38) este valabilă pentru orice secţiune {s} din circuit iar relaţia (3.39) este valabilă pentru orice buclă [b] din circuit.

Problema fundamentală a analizei circuitelor neliniare constă în determinarea tuturor curenţilor şi tensiunilor din laturile unui circuit atunci când se cunosc parametrii elementelor şi topologia circuitului. Pentru rezolvarea problemei fundamentale, se utilizează ecuaţiile (3.38) şi (3.39) care alcătuiesc un set de ecuaţii liniare şi independente, dacă sunt aplicate pe un sistem de secţiuni şi bucle independente. Aceste relaţii nu sunt suficiente pentru rezolvarea problemei, astfel încât se adaugă ecuaţiile neliniare ce dau relaţiile între tensiunile şi curenţii din laturile circuitului:

$$u_k = R_k i_k - e_k,\ u_k = \widehat{U}(i_k) \quad sau \quad i_k = \hat{I}(u_k); \qquad k = 1, 2, ..., L \tag{3.40}$$

Deoarece sistemul (3.40) este un sistem neliniar rezultă că soluţia sa nu poate depinde liniar de datele problemei şi în consecinţă teoremele liniarităţii, superpoziţiei şi reciprocităţii nu sunt valabile pentru circuitele neliniare. Aceste teoreme se pot aplica, cel mult, pentru circuitele liniare de mici variaţii. Din teoremele lui Kirchhoff sub formă generală rezultă ca o consecinţă **teorema lui**

Tellegen (1.5), care este aplicabilă şi circuitelor neliniare. Particularizând teorema lui Tellegen rezultă **teorema bilanţului puterilor** într-un circuit neliniar izolat:

$$\sum_{k=1}^{L} u_k i_k = 0. \tag{3.41}$$

În cazul unei **reţele neizolate** se poate demonstra că aceasta, privită ca un multipol, absoarbe pe la cele n borne o putere:

$$P = \sum_{k=1}^{n} i_k v_k, \tag{3.42}$$

în care v_k sunt potenţialele bornelor, iar i_k sunt curenţii ce intră în borne.

Datorită numărului mare de ecuaţii şi necunoscute, sistemul (3.38-3.39) nu este avantajos în analiza circuitelor. Din acest motiv se preferă eliminarea unora dintre necunoscute. Sistemele obţinute în urma eliminării (efectuată de regulă în partea liniară a sistemului), sunt date de următoarele teoreme ce stau, fiecare, la baza unei metode de analiză a circuitulor neliniare.

Teoremele lui Kirchhoff referitoare la curenţi pot fi aplicate la analiza circuitelor cu elemente neliniare controlate în curent şi se obţin din (3.38) prin eliminarea tensiunilor u_k, obţinându-se:

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in(n)} i_k = 0, \qquad n = 1,2,...,(N-1); \\ &\sum_{k\in[b]} \widehat{U}_k(i_k) + \sum_{k\in[b]} R_k \cdot i_k = \sum_{k\in[b]} e_k, \qquad b = 1,2,...,(L-N+1). \end{aligned} \tag{3.43}$$

Teoremele lui Kirchhoff referitoare la tensiuni pot fi aplicate la analiza circuitelor cu elemente neliniare controlate în tensiune şi se obţin din (3.38) prin eliminarea curenţilor i_k:

$$\begin{aligned} &\sum_{k\in(n)} \hat{I}_k(u_k) + \sum_{k\in(n)} G_k \cdot u_k + \sum_{k\in(n)} j_k = 0, \qquad n = 1,2,...,(N-1) \\ &\sum_{k\in[b]} u_k = 0, \qquad b = 1,2,...,(L-N+1). \end{aligned} \tag{3.44}$$

Dacă un circuit neliniar conţine atât elemente comandate în curent cât şi elemente comandate în tensiune poate fi utilizată în analiză o **metodă hibridă** a teoremelor lui Kirchhoff, în care necunoscutele sunt tensiunile dintr-un arbore şi curenţii din coarbore. Pentru aplicarea acestei metode este necesar ca să existe un arbore care să conţină toate elementele controlate în tensiune, urmând ca toate elementele controlate în curent să se afle în coarbore.

Teorema curenţilor de coarde (curenţilor ciclici în circuite neliniare) poate fi aplicată circuitelor ce conţin doar elemente controlate în curent şi se obţine din

relaţiile (3.43) prin eliminarea curenţilor de ramuri:

$$\sum_{j\in[b]} \widehat{U_j} \cdot (\sum_{j\in(k)} i'_k) + \sum_{j=1}^{L} R_j I'_j = \sum_{j\in[b]} e_j, \qquad b = 1, 2, ..., (L - N + 1), \qquad (3.45)$$

urmând ca necunoscutele principale să fie curenţii i_b,$b = 1, 2, ..., (L - N + 1)$ din coarde (curenţii dintr-un sistem de bucle fundamentale, numiţi şi curenţi ciclici). **Teorema potenţialelor nodurilor** poate fi aplicată circuitelor ce conţin doar elemente controlate în tensiune şi se obţine din relaţiile (3.44) prin exprimarea tensiunilor u_k ca diferenţe dintre potenţialele v_{ik} şi v_{fk} ale capetelor laturilor:

$$\sum_{k\in(n)} \hat{I}_k \cdot (v_{ik} - v_{fk}) + \sum_{j=1}^{L} G_{nj} v_j = \sum_{k\in(n)} j'_k, \qquad n = 1, 2, ..., (N - 1), \qquad (3.46)$$

necunoscutele principale ale acestei metode fiind potenţialele v_k, k=1,2,...,(N-1) nodurilor circuitului. O **teoremă de unicitate** pentru soluţiile unui circuit neliniar afirmă că dacă un circuit neliniar rezistiv este alcătuit din elemente dipolare având caracteristici strict monotone care satisfac proprietatea:

$$\lim_{i\to\pm\infty} \widehat{U}(i) = \pm\infty,$$

surse independente de curent ce nu formează secţiuni şi surse independente de tensiune ce nu formează bucle (deci circuitul nu are generatoare în exces), atunci:

a) circuitul neliniar are soluţie unică;

b) caracteristicile de intrare sunt funcţii strict monotone faţă de orice poartă a circuitului;

c) caracteristicile de transfer $u_1 - u_2$ şi $i_1 - i_2$ au pantă subunitară.

Teorema de unicitate pentru circuitele neliniare monotone delimitează o clasă de circuite ce au puncte de operare unice, punând în evidenţă anumite proprietăţi de monotonie ale caracteristicelor, utile în aplicaţii.

Teorema de invarianţă afirmă că circuitele alcătuite din elemente cu caracteristici $u - i$ invariabile în timp au caracteristicile de intrare şi transfer, faţă de orice poartă, invariante în timp. Teorema de invarianţă permite reducerea analizei circuitelor dinamice, invariabile, rezistive ce sunt excitate de surse variabile în timp, la problema determinării caracteristicilor de intrare şi de transfer. De exemplu, fie un circuit la care caracteristica de transfer $u_1 - i_2$ este o funcţie $i_2 = T(u_1)$, dacă la poarta 1 se conectează un generator ideal de tensiune electromotoare $e(t)$, atunci curentul din poarta 2 este $i_2 = T(e(t))$.

Teorema pasivităţii afirmă că subreţelele neliniare alcătuite din elemente pasive transferă pe la borne o putere totală (3.42) nenegativă.

Un rezistor *neliniar este pasiv* atunci când caracteristica sa $u - i$, cu sensurile asociate după regula de la receptoare este cuprinsă în cadranele 1 şi 3 ale planului (u, i), urmând ca intersecţia cu axele să se facă în origine. Elementele de circuit care nu sunt pasive se numesc *active*. Un element de circuit rezistiv pasiv nu poate transfera putere spre circuit. Există elemente neliniare pasive care totuşi la mici variaţii sunt active, această proprietate având aplicaţii importante în practică (dioda tunel, tranzistorul, trioda, etc.). Două circuite neliniare organizate ca multipli se definesc a fi *echivalente* dacă ele stabilesc aceleaşi relaţii între curenţii şi potenţialele bornelor terminale.

Teorema de echivalenţă afirmă că dacă două circuite N_1 şi N_2 sunt echivalente, atunci prin înlocuirea subreţelelor N_1 prin N_2 într-o reţea nu se modifică tensiunile şi curenţii din interiorul reţelei complementare N (fig. 3.26).

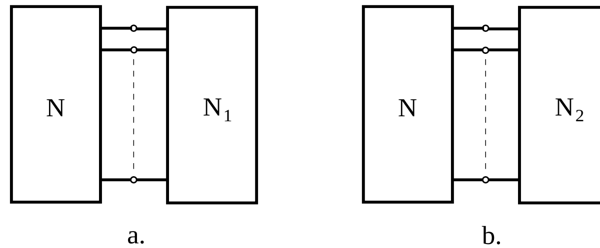


Fig. 3.26.

Aplicarea teoremei de echivalenţă permite simplificarea analizei unui circuit neliniar prin efectuarea unor transfigurări convenabile. Pentru efectuarea transfigurărilor sunt utile următoarele observaţii referitoare la echivalenţa circuitelor. Un circuit neliniar rezistiv, staţionar, N este echivalent, faţă de o poartă, cu un element rezistiv dipolar (eventual activ) având caracteristica $u - i$ identică cu caracteristica de intrare a circuitului N (fig. 3.27.a, b).

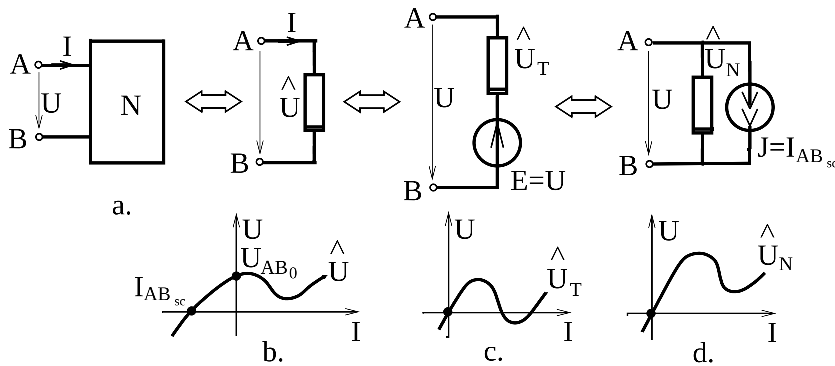


Fig. 3.27.

Teorema lui Thévenin pentru circuite neliniare afirmă că, faţă de orice poartă, un circuit rezistiv este echivalent cu un element dipolar rezistiv pasiv înseriat cu un generator ideal de tensiune electromotoare U_{AB0} (fig. 3.27.c).

Teorema lui Norton pentru circuite neliniare afirmă că, faţă de orice poartă, un circuit rezistiv este echivalent cu un rezistor pasiv conectat în paralel cu un generator ideal de curent electromotor I_{ABsc} (fig. 3.27.d).

Teoremele de echivalenţă ale generatoarelor ideale. Sunt evidente deoarece echivalenţele prezentate în figura 3.28, cu condiţia ca N_1 să fie compatibil cu generatorul ideal de curent (să existe cel puţin un punct de operare pe caracteristica lui N_1 care să corespundă tensiunii e), iar N_2 să fie compatibil cu generatorul ideal de tensiune.

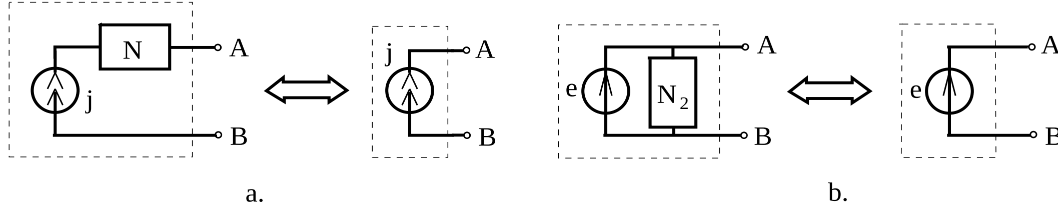


Fig. 3.28.

Teoremele lui Vaschy afirmă echivalenţele prezentate în figura 3.29, respectiv faptul că o stea de generatoare ideale identice şi conectate identic faţă de nodul central este echivalentă cu o stea de conductoare perfecte, iar o buclă de generatoare ideale de curent orientate similar este echivalentă cu o buclă de izolatoare perfecte.

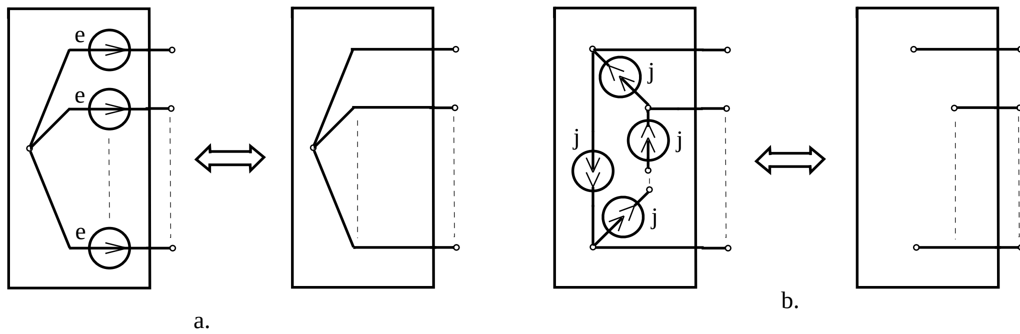


Fig. 3.29.

Teoremele de substituţie afirmă că dacă un element neliniar dintr-un circuit are punctul de operare $P_0(u_0, i_0)$, atunci prin substituţia lui cu: un generator ideal de tensiune electromotoare $e = u_o$; un generator ideal de curent electromotor $j = i_0$ sau un rezistor liniar de rezistenţă $R = u_0/i_0$, mulţimea punctelor de

operare ale noului circuit va conţine şi punctul de operare al circuitului iniţial (fig. 3.30).

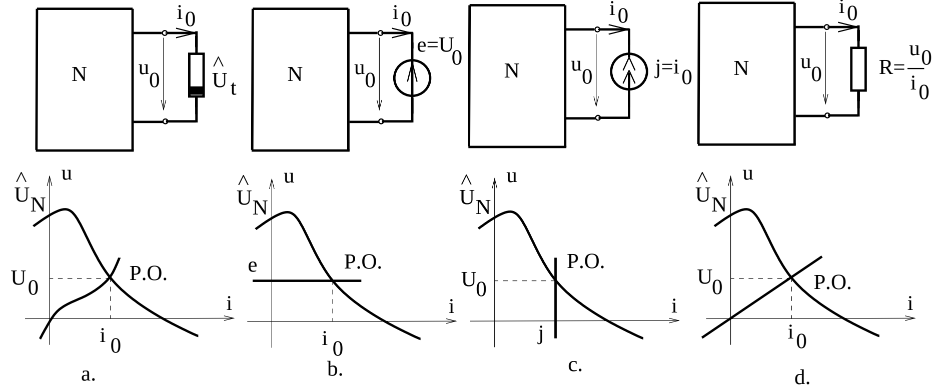


Fig. 3.30.

Ca o consecinţă a teoremei substituţiei rezultă că ecuaţiile curenţilor ciclici (2.55) şi ecuaţiile potenţialelor nodurilor (2.59) sunt valabile şi în cazul circuitelor neliniare, cu condiţia ca rezistenţele şi conductanţele ce intervin în aceste ecuaţii să fie rezistenţele şi conductanţele statice în punctul de operare. Deoarece rezistenţele şi conductanţele statice depind de punctele de operare, ecuaţiile (2.55) şi (2.59) îşi pierd caracterul liniar. O altă consecinţă a teoremei substituţiei este **teorema transferului maxim de putere** pentru elemente neliniare, care afirmă că o reţea dipolară liniară şi activă transferă putere maximă unui element dipolar neliniar, dacă în punctul de operare elementul neliniar are rezistenţa statică R_s egală cu rezistenţa echivalentă a reţelei pasivizate $R_s = R_{AB0}$ (fig. 3.31).

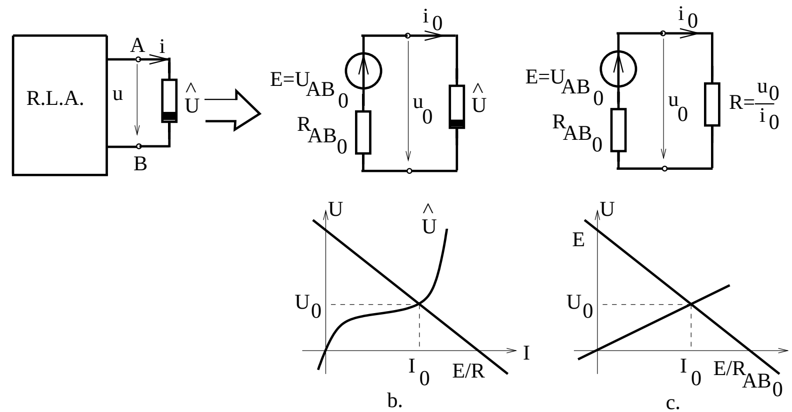


Fig. 3.31.

Teoremele de simetrie permit micşorarea efortului de calcul în analiza circuitelor electrice neliniare ce prezintă simetrii. Fie două circuite identice N'

şi N'' conectate ca în figura 3.32.a. Teorema de simetrie afirmă că intensităţile curenţilor prin conductoarele directe i_1, i_2 sunt nule, iar tensiunile între firele încrucişate sunt nule. În consecinţă, analiza se reduce la analiza circuitului N' conectat ca în figura 3.32.b.

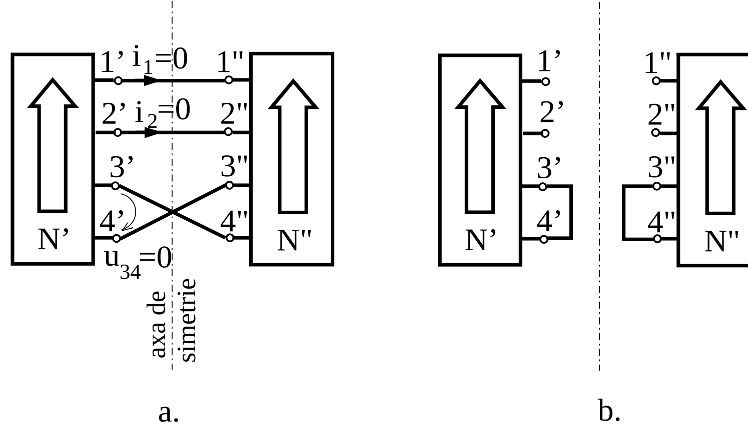


Fig. 3.32.

Dacă cele două circuite identice sunt conectate invers, un circuit fiind răsturnat faţă de celălalt, ca în figura 3.33, atunci tensiunile $u_{11'}$ între bornele simetrice conectate direct sunt nule, iar curenţii i_2, i_3 prin bornele simetrice încrucişate sunt nuli. În consecinţă, analiza se reduce la analiza circuitului N' conectat ca în figura 3.33.b.

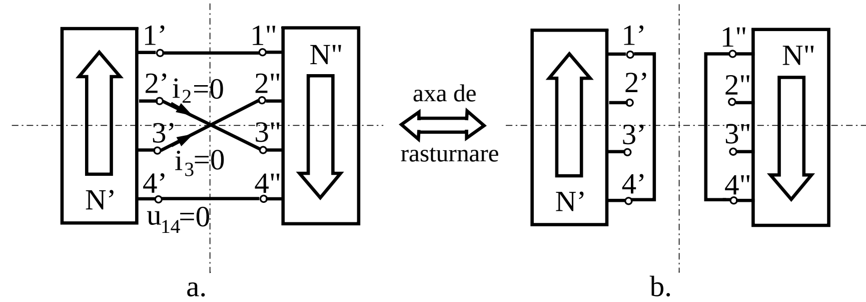


Fig. 3.33.

În alcătuirea circuitelor electrice neliniare pot interveni pe lângă elementele dipolare şi elementele cuadripolare de tipul surselor comandate, dar la care comanda se face neliniar. La fel ca în cazul liniar pot exista patru tipuri de surse comandate neliniar, cu deosebirea că în cazul parametrilor de transfer caracterizarea se face prin funcţii neliniare de transfer, numite funcţii caracteristice. În figura 3.34.a. este prezentată o sursă de tensiune comandată neliniar de curent.

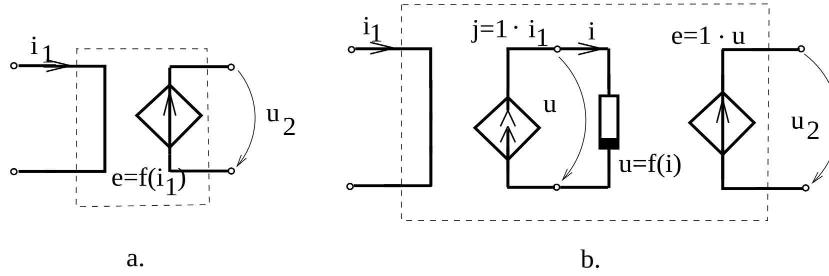


Fig. 3.34.

Sursele comandate neliniar admit scheme echivalente cu surse comandate liniar şi un rezistor neliniar a cărui caracteristică $u - i$ este chiar funcţia caracteristică a sursei comandate. În figura 3.34.b este prezentată schema echivalentă a sursei de tensiune comandată neliniar de curent. Sursele comandate neliniar sunt utile în stabilirea schemelor echivalente circuitelor neliniare. De exemplu, un circuit neliniar ce are o caracteristică de intrare $u_1 = \hat{T}_1(i_1)$ faţă de o poartă P_1 şi o caracteristică de transfer $u_2 = \hat{T}_2(i_1)$ între poarta P_1 şi poarta P_2, poate fi echivalat ca în figura 3.35 (pentru $i_2 = 0$) cu un element neliniar cu caracteristica de intrare $u = \hat{T}_1(i)$ şi o sursă comandată neliniar la poarta de ieşire având caracteristica de transfer $e = \hat{T}_2(i)$.

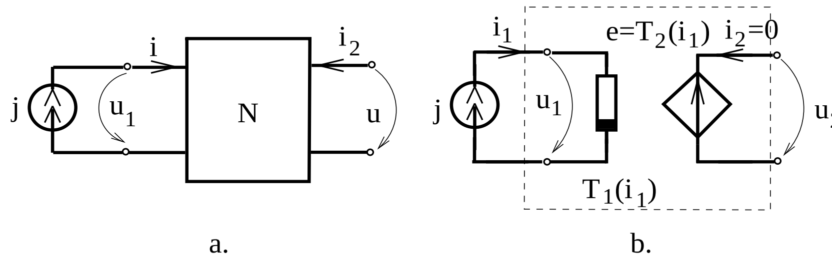


Fig. 3.35.

Un exemplu de element de circuit electronic ce admite o schemă echivalentă cu surse comandate neliniar este **amplificatorul operaţional**. Schemele echivalente liniare ale amplificatorului operaţional, prezentate în figura 3.25, sunt valabile doar pentru valori mici ale tensiunii de intrare, tensiunea de ieşire $u_0 = A_0 u_i$ neputând depăşi o anumită valoare maximă $|u_o| \leq u_m$.

Schema echivalentă a amplificatorului operaţional cu element neliniar este prezentată în figura 3.36 şi conţine, pe lângă rezistenţa de intrare R_i şi cea de ieşire R_o, o sursă de tensiune controlată de tensiunea de intrare u_i, a cărei caracteristică de transfer este prezentată în figura 3.36.c. În vecinătatea originii caracteristicii de transfer, $e = f(u_i)$ este o dreaptă având panta egală cu ampli-

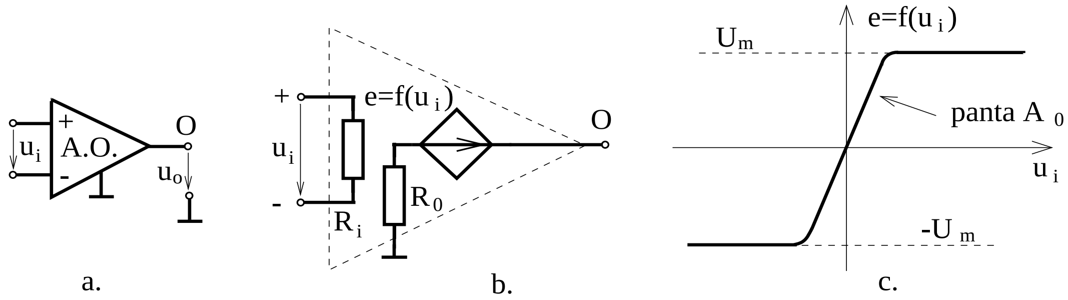


Fig. 3.36.

ficarea în buclă deschisă A_o a amplificatorului. Tensiunea de ieşire devine $+U_m$, pentru $u_i > \varepsilon$, sau $-U_m$ pentru $u_i < -\varepsilon$. În acest caz se spune că amplificatorul este saturat superior respectiv inferior. În circuitele cu reacţie pozitivă amplificatorul operaţional se saturează şi nu poate fi utilizată schema echivalentă liniară din figura 3.27.c. Modelul neliniar cel mai simplu pentru amplificatorul operaţional $R_i \to \infty, A_o \to \infty, R_o = 0$ este (fig. 3.37), cel ce corespunde unei surse de tensiune comandate în tensiune cu caracteristica $u_2 = U_n\ \mathrm{sgn}(u_1)$.

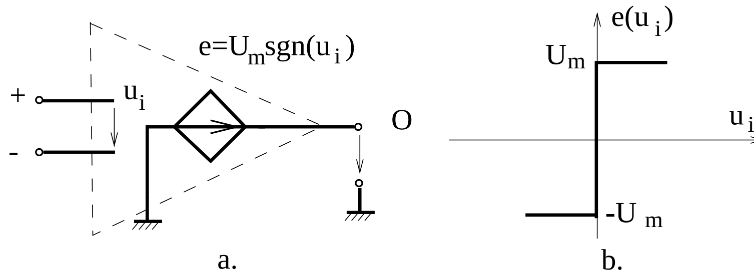


Fig. 3.37.

Teorema dualităţii. Dacă două circuite N şi N' sunt duale unul altuia, atunci valorile curenţilor i_k şi tensiunilor u_k din laturile circuitului N sunt numeric egale cu valorile din laturile duale, din circuitul N' : $u'_k = i_k$, $i'_k = u_k$. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un circuit cu elemente dipolare să admită circuit dual este ca graful lui să fie planar.

Următorul **algoritm** defineşte circuitul dual N' al unui circuit dat N conţine următoarele etape:

- se construieşte graful orientat G al circuitului N (se adoptă regula de asociere a sensurilor de la receptoare);

- în interiorul fiecărui ochi $[i]$ al grafului G şi în exteriorul grafului se plasează câte un nod (i) al grafului G';

- se consideră fiecare latură l din graful G, comună ochiurilor $[i]$ şi $[j]$ şi se trasează latura l' în graful G', unind nodurile (i) şi (j);

- se orientează laturile l' ale grafului G' astfel încât nodul de plecare a laturii l' să vadă latura duală l orientată în sens trigonometric;

- se introduce în fiecare latură l' un element dual elementului din latura asociată l, conform tabelului de dualitate:

curentul i	tensiunea u′
tensiunea u	curentul i′
rezistor neliniar u=f(i)	rezistor neliniar i′=f(u′)
rezistor liniar având rezistenţa $R[\Omega]$	rezistor liniar având conductanţa G′
generator independent cu t.e.m. e(t)	generator independent având c.e.m. j′(t)
generator independent de curent j(t)	generator independent de tensiune e′(t)
conductor perfect	izolator perfect
izolator perfect	conductor perfect
laturi serie	laturi paralel
ramuri	coarde
coarde	ramuri
bucle fundamentale	secţiuni fundamentale
secţiuni fundamentale	bucle fundamentale

De exemplu, un rezistor cu rezistenţa $R = 7\Omega$ are corespondent în circuitul dual un rezistor cu conductanţa $G = 7$S; un generator cu t.e.m. $e = 5$V are corespondent in circuitul dual un generator ideal de curent cu $j = 5$A.

PROBLEME

3.5.1. Să se analizeze şi să se discute numărul punctelor de operare pentru circuitele din figura 3.5.1 pentru diferite valori ale parametrilor E, R_1, R_2. Va fi utilizat modelul de amplificator operational din figura 3.37.

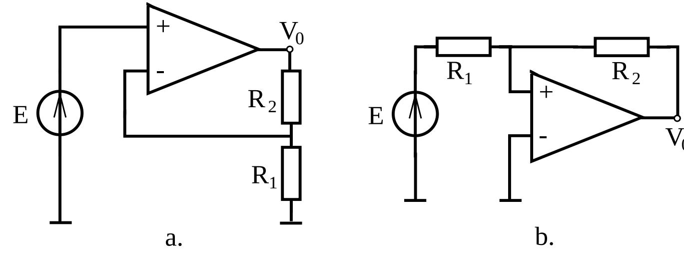


Fig. 3.5.1.

3.5.2. Să se determine grafic caracteristica de intrare şi caracteristica de transfer pentru circuitele neliniare prezentate în figura 3.5.2.

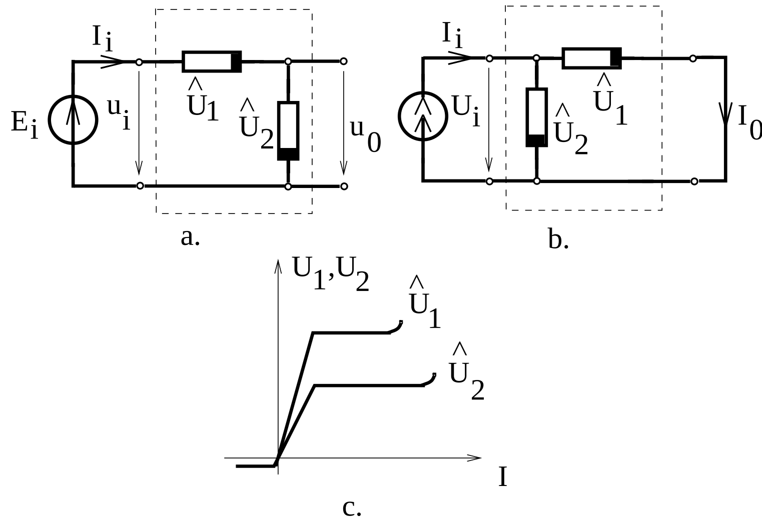


Fig. 3.5.2.

3.5.3. Să se determine caracteristicile de transfer $U_1 - U_2$ pentru circuitele prezentate în figura 3.5.3, utilizând caracteristicile elementelor neliniare dipolare prezentate în figura 3.1.2.

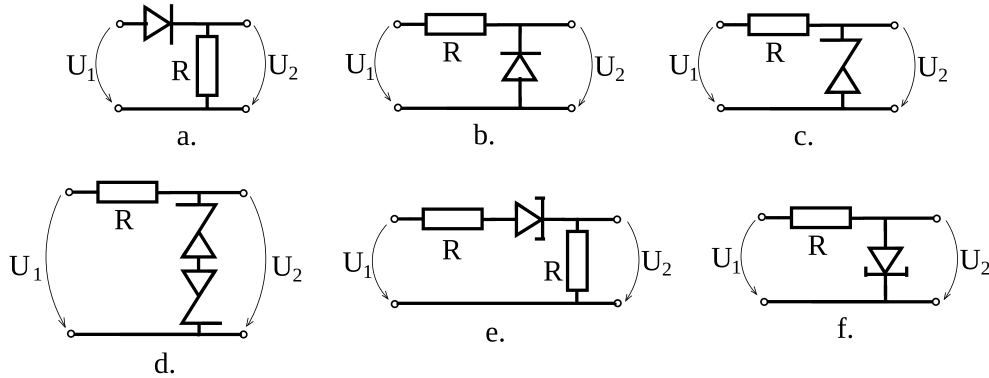


Fig. 3.5.3.

3.5.4. Să se determine caracteristica de transfer $V_o(E)$ pentru circuitele reprezentate în figura 3.5.1.

3.5.5. Să se determine caracteristicile de transfer $u_o(u_i)$ ale circuitelor reprezentate în figura 3.5.4. Pentru amplificatorul operaţional va fi utilizată schema echivalentă din figura 3.26. Să se particularizeze elementele neliniare prin diode şi diode Zener.

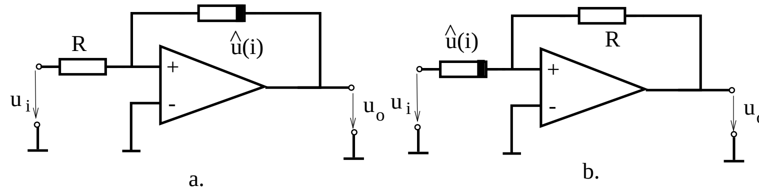


Fig. 3.5.4.

3.5.6. Să se determine caracteristicile de transfer $u_o(e)$ ale circuitelor reprezentate în figura 3.5.5.

3.5.7. Să se determine caracteristica de transfer a puterii $P = UI = f(E)$ pentru circuitul neliniar reprezentat în figura 3.5.6.

3.5.8. Să se prezinte algoritmul iterativ Newton-Raphson de analiză a circuitelor neliniare utilizând tehnicile de scriere a ecuaţiilor (3.43)-(3.46). Să se determine circuitele liniarizate echivalente, la fiecare, iteraţie unui element dipolar neliniar.

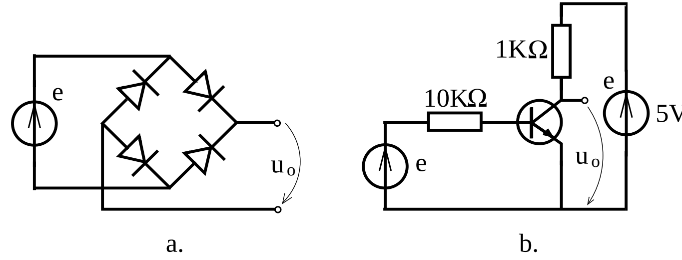


Fig. 3.5.5.

3.5.9. Să se verifice bilanţul puterilor pentru circuitele analizate în problema 3.1.12.

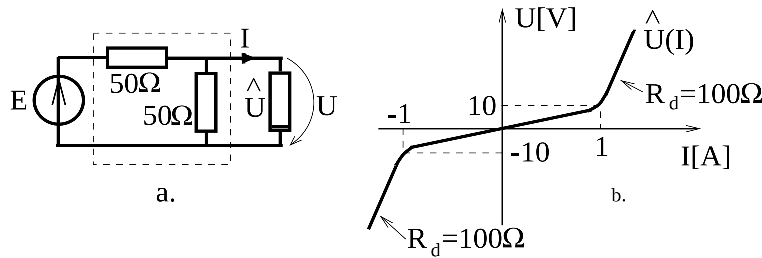


Fig. 3.5.6.

3.5.10. Să se identifice circuitele analizate în problemele 3.5.3 şi 3.5.5 pentru care poate fi aplicată teorema de unicitate prezentată în breviar şi să se verifice concluziile teoremei.

3.5.11. Să se determine şi să se reprezinte grafic modul în care variază în timp tensiunea $u_o(t)$ pentru circuitele reprezentate în figura 3.5.7, dacă tensiunea electromotoare aplicată este $e(t) = E_m \sin(\omega t)$. Modelul de amplificator adoptat va fi cel din figura 3.36. Aplicaţie numerică pentru valorile $E_m = 40$V, E=10V.

3.5.12. Să se prezinte grafic modul de variaţie în funcţie de timp a tensiunii $U_2(t)$ atunci când $U_1(t) = U_m sin(\omega t)$ pentru circuitele reprezentate în figura 3.5.3.

3.5.13. Să se determine valoarea curentului I_B pentru care dipolul AB din figura 3.5.8 absoarbe putere maximă. Se va adopta pentru tranzistor modelul din figura 3.11, considerându-se coeficientul de amplificare în curent $\beta = 50$.

3.5.14. Să se identifice care sunt parametrii generatoarelor de care depind

curenţii prin rezistoarele liniare ale circuitelor din figura 3.5.9.

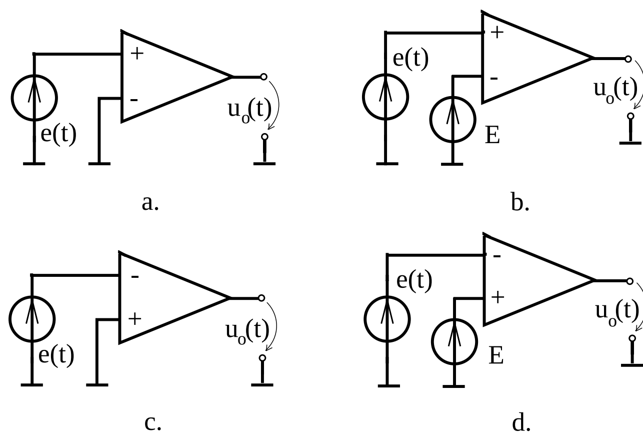


Fig. 3.5.7.

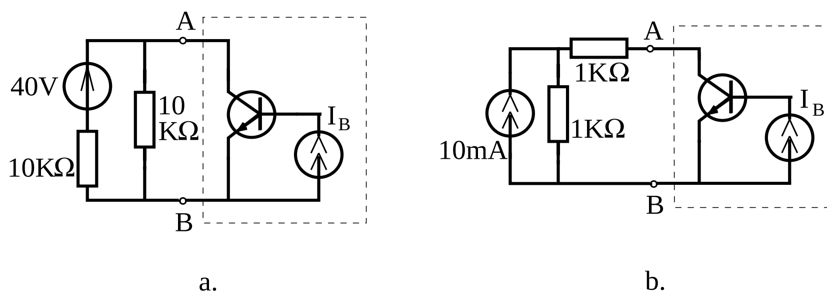


Fig. 3.5.8.

3.5.15. Să se determine care sunt mărimile (curenţi, tensiuni,potenţiale) ce se modifică în urma introducerii într-un circuit electric a unor generatoare ce satisfac teoremele lui Vachy.

3.5.16. Să se substituie elementul dipolar neliniar AB al cărui punct de operare a fost determinat în problema 3.5.13, printr-un rezistor, generator de tensiune sau generator de curent.

3.5.17. Să se analizeze circuitele reprezentate în figura 3.5.10 utilizând teorema simetriei.

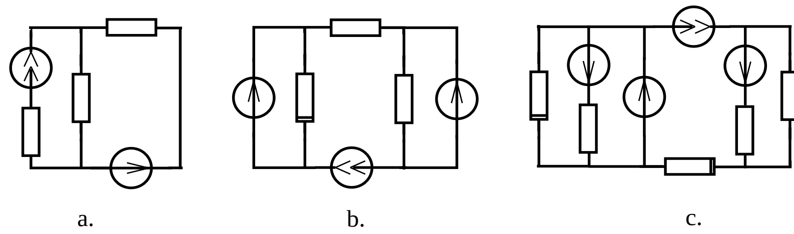


Fig. 3.5.9.

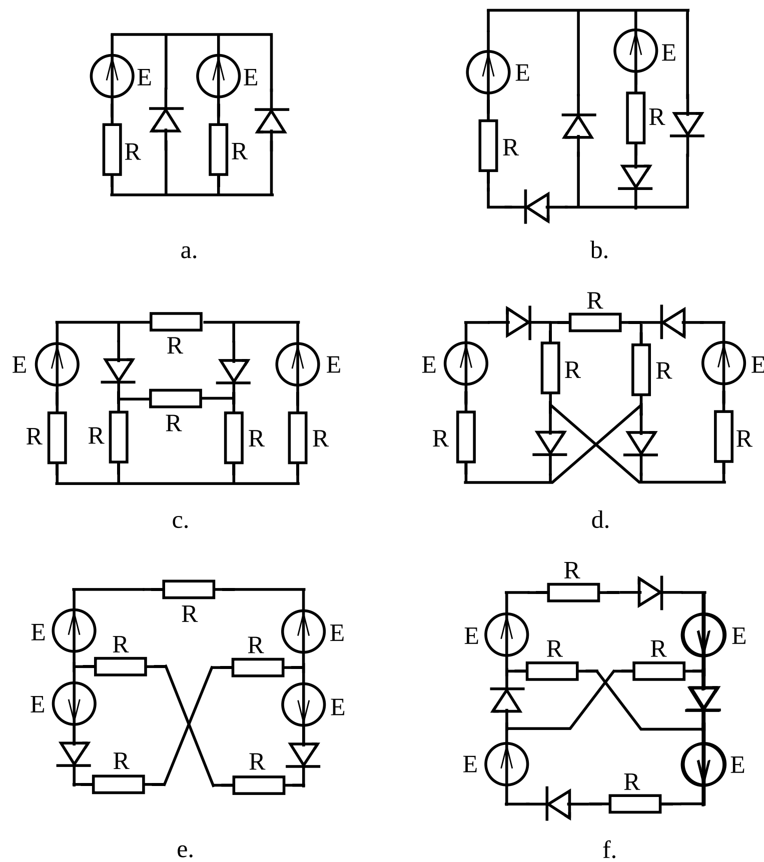


Fig. 3.5.10.